МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Рубан М.М.,

Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ — 2012

6 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою

Державного вищого навчального закладу

«Донбаський державний педагогічний університет»

в якості практимуму

для проведення факультативних занять з математики

Слов'янськ — 2013

УДК 51 (075.3)

ББК 22.1

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Рубан М.М., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2012 (Випуск 11, Серія: Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям ...): Навчальний посібник – Слов'янськ, 2013. – 64 с.

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням ЗОШ та студентам математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

РОЗГЛЯНУТО ТА РЕКОМЕНДОВАНО
ДО ДРУКУ
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
Протокол № 8 від 28.03.2013 р.

Рецензенти:

кандидат фіз.-мат. наук, **ЖУЧОК Ю.В.**,
Інститут інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри математичного аналізу та алгебри

кандидат фіз.-мат. наук, **ВЕЛИЧКО В.Є.**,
Донбаський державний педагогічний університет,
доцент кафедри алгебри.

Відповідальний за випуск: кан. фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та методики викладання математики Кадубовський О.А.

Зміст

ВІД АВТОРІВ

> «Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!.»
>
> Д. Пойа[1]

Даний посібник є одинадцятим випуском серії «ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ...» заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 24 листопада 2012 року відповідно до наказу Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 14.08.2012 року № 916 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів у 2012/2013 навчальному році» та наказу УОН № 582 від 15.10.2012 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад у 2012-2013 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника — «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

[1]Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомить в наведеній літературі, зокрема в [13][2].

В посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:
у формулюванні двоїстої або схожої задачі,
або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Колектив авторів посібника та керівництво фізико-математичного факультету державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет» висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!
З найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет».

14.02.2013

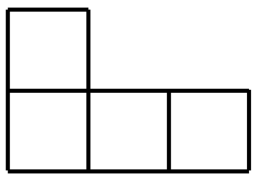
[2]Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

ЧАСТИНА І.
УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (15 балів) Сума трьох натуральних чисел дорівнює 708. Перше з них – найменше трицифрове число, друге – в три рази менше від третього. Знайдіть ці числа.

2. (15 балів) Розріжте клітчастий прямокутник розміром 5×8 на фігурки з чотирьох клітинок виду.



3. (20 балів) Куб, ребро якого дорівнює 1 дм, розрізали на маленькі кубіки з ребром 1 см і всі їх грані пофарбували. Для того, щоб пофарбувати одну грань маленького кубіка, необхідно 0,02 г фарби. Скільки необхідно фарби, щоб пофарбувати всі грані маленьких кубіків?

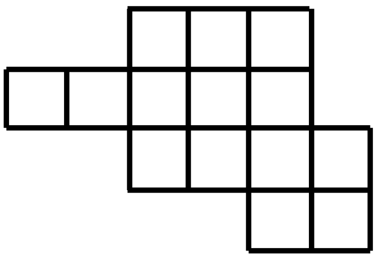
4. (20 балів) Міста A, B, C, D, E розташовані один від одного по шосе на відстані 5 км один від одного. Автобус їздить по шосе від міста A до міста E та від E до A. Автобус витрачає 20 літрів бензину кожні 100 км. У якому місті закінчиться бензин у автобуса, якщо спочатку у нього в баці було 150 літрів бензину?

5. (30 балів) В обмінному пункті здійснюються операції двох видів:
   1) дай 2 євро – отримай 3 долари і цукерку в подарунок;
   2) дай 5 доларів – отримай 3 євро і цукерку в подарунок.

Коли багатий Буратіно прийшов в обмінний пункт, у нього були тільки долари, коли пішов доларів стало менше, євро так і не з'явилися, зате він отримав 50 цукерок. У скільки доларів обійшовся Буратіно такий «дарунок»?

7 клас

1. (15 балів) Якщо деяке число збільшити на 15% , то отримаємо 207. На скільки відсотків потрібно зменшити це число, щоб отримати 126?
2. (15 балів) Розрізати фігуру, зображену на малюнку, на дві рівні частини.



3. (20 балів) Знайдіть нескоротний дріб, який не змінюється, якщо чисельник збільшити на 21 , а знаменник збільшити на 28.
4. (20 балів) Що більше 99^{20} чи 9999^{10}?
5. (30 балів) Шестизначне число ділиться на 8. Яку найменшу суму цифр воно може мати? Яку найбільшу суму цифр може мати це число?

8 клас

1. (15 балів) Розкласти на множники многочлен x^3+2x^2-3.
2. (15 балів) Скільки води треба додати до 600 грамів 40 відсоткового розчину солі, щоб отримати 12 відсотковий розчин солі?
3. (20 балів) Дано трикутник ABC. Точка M лежить на стороні BC. Відомо, що $AB=BM$ та $AM=MC$, $\angle B=100^0$. Знайдіть інші кути трикутника.

4. (20 балів) На яку цифру закінчується число 1999^{2005}.

5. (30 балів) Яку найбільшу кількість різних натуральних чисел можна вибрати так, щоб сума будь-яких трьох з них була простим числом?

9 класс

1. (15 балів) Обчисліть значення виразу $\sqrt{\left(-2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$.

2. (15 балів) Розв'яжіть рівняння $(3x+2y-4)^2+|3x-5y+3|=0$.

3. (20 балів) На основах AB і CD трапеції $ABCD$ позначено точки K і L. Нехай E – точка перетину відрізків AL і DK, F – точка перетину BL і CK. Довести, що сума площ трикутників ΔADE і ΔBCF дорівнює площі чотирикутника $EKFL$.

4. (20 балів) Не використовуючи наближені обчислення порівняйте числа $a=\sqrt{34}+5$ та $c=\sqrt{54}+3$

5. (30 балів) Довести, що

$$a+b>\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2012}\right)^2,$$

якщо $a>0$, $b>0$, $ab>2011a+2012b$.

10 класс

1. (15 балів) Розв'яжіть нерівність

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|\left(x^2-x-6\right)\leqslant 0.$$

2. (15 балів) Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x+(y-2)^{2012}=z, \\ y+(z-2)^{2012}=x, \\ z+(x-2)^{2012}=y. \end{cases}$$

3. (20 балів) В ΔABC кут при вершині С дорівнює 120^0. Доведіть, що довжина відрізка, який сполучає вершину C з центром вписаного кола, дорівнює $2\,(p - AB)$, де p – півпериметр ΔABC.

4. (20 балів) Не обчислюючи значення виразу $2011^2{+}2011^2{\cdot}2012^2{+}2012^2$, покажіть, що це число можна представити у вигляді точного квадрата n^2, знайдіть це натуральне число n.

5. (30 балів) Знайдіть всі прості числа x та y, що задовольняють рівнянню $x^2 - 2y^2 = 1$.

11 класс

1. (15 балів) Знайти всі такі значення a, при яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)\,x - a - 3 = 0$ буде найменшою.

2. (15 балів) В квадрат вписали коло, в нього вписали квадрат, а в нього вписали ще одне коло і т.д. Знайти відношення площі першого квадрата до площі 2012 квадрата.

3. (20 балів) Побудуйте графік функції

$$y = \sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3}.$$

4. (20 балів) Для четвірки чисел x, y, u, v виконуються співвідношення $x^{20} + y^{20} = u^{20} + v^{20}$ і $x^{10} + y^{10} = u^{10} + v^{10}$. Доведіть, що виконується співвідношення

$$x^{2010} + y^{2010} = u^{2010} + v^{2010}.$$

5. (30 балів) Обчисліть суму

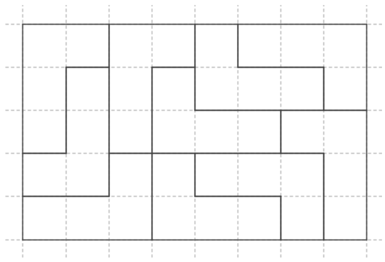
$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx},$$

якщо відомо, що $xyz = 1$.

ЧАСТИНА II.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

6 клас

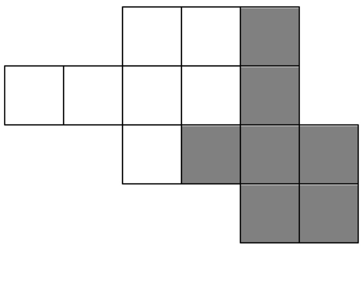
1. `Відповідь:` 100; 152; 456.
2. Наприклад, у наступний спосіб.



3. `Відповідь:` 120 г.
4. `Відповідь:` у місті C.
5. `Відповідь:` 10 доларів.

7 клас

1. `Відповідь:` 30%.
2.



3. `Відповідь:` $\dfrac{3}{4}$.
4. `Відповідь:` $9999^{10} > 99^{20}$.

5. Відповідь: 1 і 51 відповідно.

8 клас

1. Відповідь: $(x-1)(x^2+3x+3)$.
2. Відповідь: 1 400 грам.
3. Відповідь: 60^0, 20^0.
4. Відповідь: 9.
5. Відповідь: 4.

9 класс

1. Відповідь: $2\sqrt{5}$.
2. Відповідь: $(\frac{2}{3};1)$.
3. – «задача на доведення».
4. Відповідь: $\sqrt{34}+5>\sqrt{54}+3$.
5. – «задача на доведення».

10 класс

1. Відповідь: $x\in[-2;0)\cup(0;3]$.
2. Відповідь: $(2;2;2)$.
3. – «задача на доведення».
4. Відповідь: $n=2011^2-2011+1$.
5. Відповідь: $x=3$, $y=2$.

11 класс

1. Відповідь: $a=1$.
2. Відповідь: 2^{2011}.
3. $y=4$.
4. – «задача на доведення».
5. Відповідь: 1.

ЧАСТИНА III. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача 1.

Нехай друге шукане число дорівнює x, тоді (оскільки третє число у три рази більше другого) третє число дорівнює $3x$.

Найменшим трицифровим натуральним числом є число 100.

Оскільки за умовою сума трьох шуканих чисел становить 708, то має місце рівняння

$$100 + x + 3x = 708.$$

Звідки

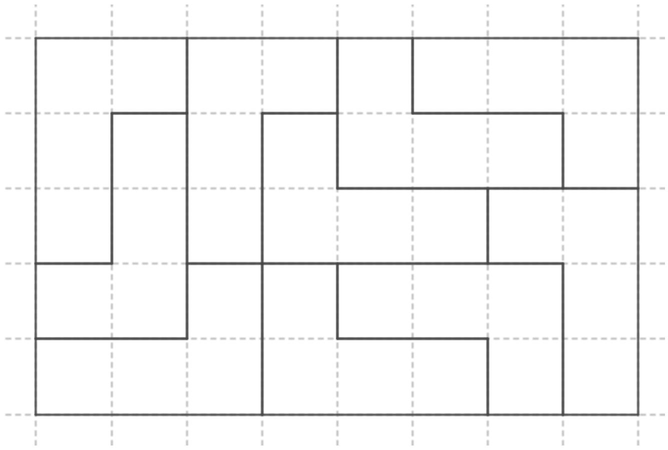
$$\begin{aligned} 4x &= 708 - 100 \\ 4x &= 608 \\ x &= 608 : 4 \\ x &= 152. \end{aligned}$$

Розв'язавши рівняння одержали, що $x = 152$. Тому друге шукане число дорівнює 152, а третє шукане число – $456 = 3 \cdot 152$. Отже, шуканими числами є числа 100, 152, 456.

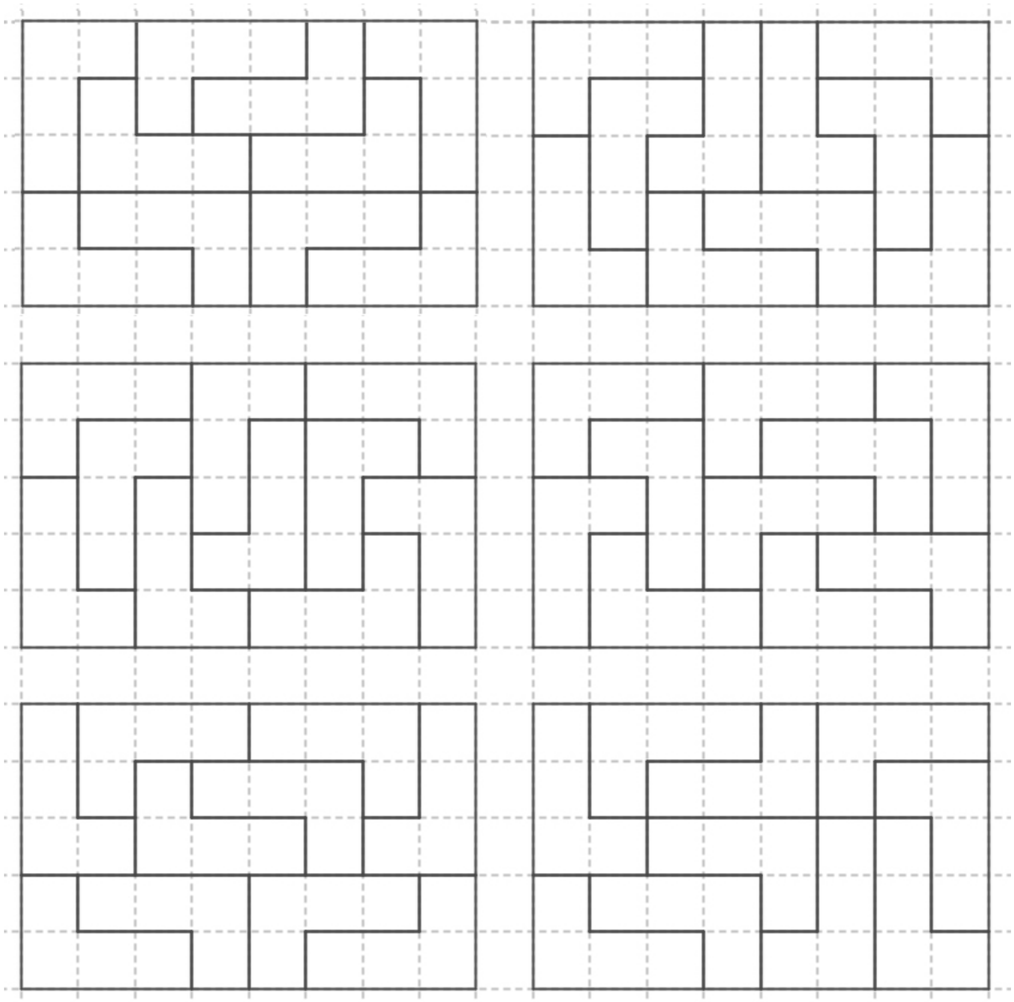
Відповідь: 100; 152; 456.

Задача 2.

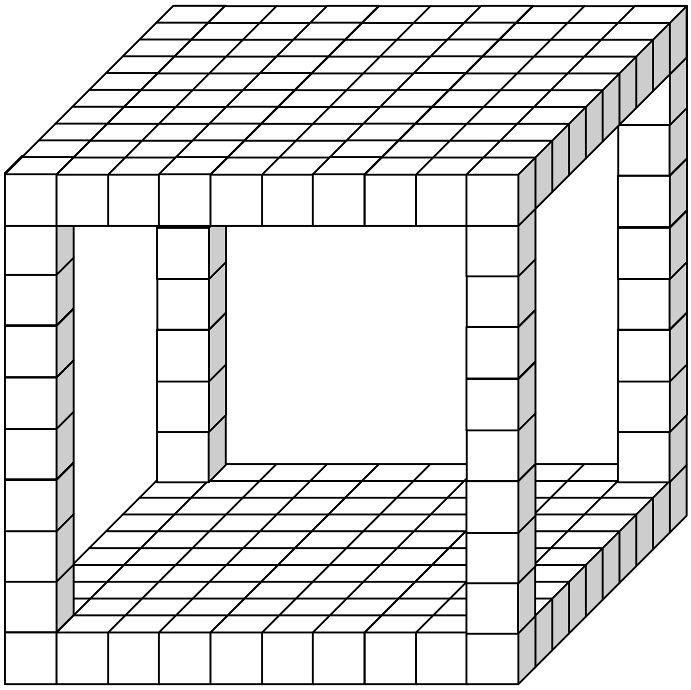
Шукане «розрізання» клітчастого прямокутника розміром 5×8 на фігурки зазначеного виду наведено на рисунку нижче.



Зауважимо, що шукане розрізання можна провести не в єдиний спосіб.



Задача 3.



Розв'язання.

1) Відомо, що в 1 дециметрі (дм) 10 сантиметрів (см). Оскільки довжина ребра даного куба дорівнює 1 дм (10 см), то об'єм V цього куба (в см^3) становить

$$V = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000 \quad (\text{см}^3).$$

2) За умовою даний куб порізали на кубики з довжиною ребра 1 см. Об'єм V' кожного такого «маленького» кубика становить

$$V' = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad (\text{см}^3).$$

3) Оскільки даний куб (з довжиною ребра 10 см) порізали весь на кубики з довжиною ребра 1 см, то загальне число n «маленьких» кубиків становить

$$n = \frac{V}{V'} = \frac{1\,000}{1} = 1\,000.$$

4) Кожен куб має 6 граней. Тому загальне число m граней всіх «маленьких» кубиків становить

$$m = n \cdot 6 = 1\,000 \cdot 6 = 6\,000.$$

5) Оскільки для фарбування однієї грані «маленького» кубика необхідно витратити $0,02$ грамів фарби, то для фарбування граней всіх «маленьких» кубиків необхідно витратити

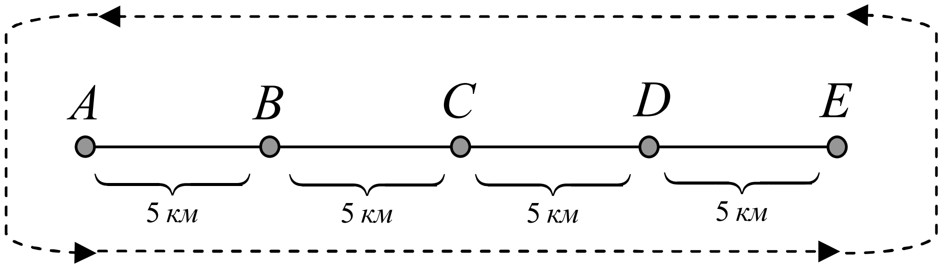
$$6\,000 \cdot 0,02 = 1\,000 \cdot 6 \cdot 0,02 = 0,12 \cdot 1\,000 = 120$$

грамів фарби.

Відповідь: 120 грам.

Задача 4.

I спосіб



За умовою автобус витрачає 20 літрів бензину кожні 100 км. Тому кожні 5 км (100:20=5) автобус витрачає 1 літр бензину.

Отже, на проміжку між двома зупинками (відстань між кожними з яких 5 км) автобус витрачає 1 літр бензину. Тому на подорож із міста A до міста E (або ж з E до A) автобус витрачає точно 4 літри бензину. А на весь рейс з міста A до міста E і назад до міста A – точно 8 літрів бензину.

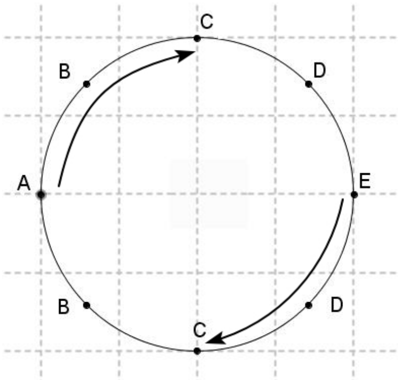
Спочатку в баці автобуса було 150 літрів бензину. Оскільки $150 = 8{\cdot}18{+}6$, то зробивши 18 (повних) рейсів автобус опиниться у місті A, причому у нього в баці ще залишиться 6 літрів бензину.

Витративши 4 літри бензину автобус доїде до міста E, причому у нього в баці ще залишиться 2 літри бензину.

Цих двох літрів вистачить лише на 10 км. І тому, витративши весь бензин, автобус зупиниться у пункті C.

II спосіб

З умови випливає, що 1 літр палива автобус витрачає кожні 5 км ($100/20 = 5$). Тому для того щоб витрати 150 літрів, необхідно проїхати $150 \cdot 5 = 750$ км.



Представимо за допомогою рисунка маршрут пересування автобусу. Маршрут автобуса який складається з таких переміщень $A \to B \to C \to D \to E \to D \to C \to B \to A$ назвемо «повним».

Легко бачити, якщо автобус завершує один «повний» маршрут, то було подолано відстань в 40 км ($5 \cdot 8 = 40$). Всього «повних» маршрутів на відстані 750 км може бути 18 (18 – ціла частина від ділення 750 на 40: $750 = 18 \cdot 40 + 30$). Отже залишається один «неповний» маршрут довжина якого $750 - 18 \cdot 40 = 30$ км, тобто необхідно проїхати 6 відстаней по 5 км ($A \overset{5_{[1]}}{\to} B \overset{5_{[2]}}{\to} C \overset{5_{[3]}}{\to} D \overset{5_{[4]}}{\to} E \overset{5_{[5]}}{\to} D \overset{5_{[6]}}{\to} C$) та зупинитися в пункті C.

Відповідь: бензин закінчиться у місті C.

Задача 5.

I спосіб

Нехай у Буратіно до початку здійснення операцій було x доларів. Оскільки після всіх банківських операцій у Буратіно виявилося 50 цукерок, то він здійснив в обмінному пункті 50 операцій.

Припустимо, що за весь час в обмінному пункті Буратіно здійснив y банківських операцій по обміну «доларів на єври з цукерками» (операцій I-го типу). Тоді банківських операцій по обміну «єврів на долари з цукерками» (операцій II-го типу) він здійснив $(50 - y)$ разів.

Тому в результаті здійснення операцій I-го типу у Буратіно в руках за весь час (сумарно) побувало $3y$ євро. Причому для здійснення цих операцій йому знадобилося (повинен був внести до банкомату) $5y$ доларів.

Оскільки після здійснення всіх 50 операцій у Буратіно не виявилося жодного євро, то це означає, що Буратіно «позбавився» від всіх $3y$ євро в результаті $(50-y)$ операцій II-го типу. Тому має місце рівняння $3y = 2(50-y)$. Звідки $y = 20$. Причому, в результаті здійснення $30 = 50 - 20$ операцій II-го типу Буратіно від банкомата сумарно одержав $3 \cdot 30 = 90$ доларів.

Таким чином в результаті здійснення 20 операцій I-го типу та 30 операцій II-го типу у Буратіно залишилася наступна кількість доларів

$$x - 5 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = x - 100 + 90 = x - 10.$$

Отже, «дарунок з 50 цукерок» обійшовся Буратіно у 10 доларів.

II спосіб

Подамо кожен тип операцій з обміну в символьному виді:

(I)	дай 2 євро – отримай 3 долари і цукерку в подарунок;	$-2e+3d+c$
(II)	дай 5 доларів – отримай 3 євро і цукерку в подарунок;	$-5d+3e+c$

де літерою e позначено євро, d — долари, а c – цукерки. Число, яке стоїть перед літерою e або d, в залежності від знаку, вказує на кількість отриманих чи відданих відповідних грошових одиниць.

Оскільки в кінці всіх обмінів кількість євро була рівна 0, то сукупність усіх (необхідних для цього) операцій можна перегрупувати у блоки виду « $3(I)+2(II)$ », результат виконання операцій кожного з яких можна подати у вигляді $3(-2e+3d+c)+2(-5d+3e+c) =$

$$= -6e+9d+3c-10d+6e+2c = -1d+5c.$$

Тобто, виконавши 3 операції (I)-го типу та 2 операції (II)-го типу, Буратіно отримає 5 цукерок та втратить 1 долар. Причому число 3 операцій (I)-го типу та число 2 операцій (II)-го типу є найменш можливими, оскільки числа 2 і 3 є взаємно-простими.

Зрозуміло, що для отримання 50 цукерок – необхідно здійснити 10 блоків операцій типу « $(3(I)+2(II))$ », результат виконання яких можна подати у вигляді $10(-1d+5c) = -10d+50c$. З останнього й випливає, що на «дарунок з 50 цукерок» було витрачено 10 доларів.

Відповідь: 10.

7 клас

Задача 1.

Нехай x – початкове число. Оскільки після збільшення його на 15% отримали число 207, то має місце рівняння

$$x + 0,15x = 207.$$

Звідки

$$\begin{aligned} 1,15x &= 207 \\ 115x &= 20700 \\ x &= 20700 : 115 \\ x &= 180. \end{aligned}$$

Тепер з'ясуємо питання про те, на скільки відсотків потрібно зменшити знайдене число 180, щоб отримати число 126.

Для цього складемо відповідну пропорцію:

$$\frac{180}{126} = \frac{100}{y},$$

де y – відсоток, який складає число 126 від числа 180.

За властивістю пропорції (добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх членів пропорції) має місце рівняння

$$180y = 12\,600,$$

звідки $y = \frac{12\,600}{180} = 70$.

Таким чином, число 180 необхідно зменшити на 30% (100%-70%), щоб отримати число 126.

Відповідь: 30%.

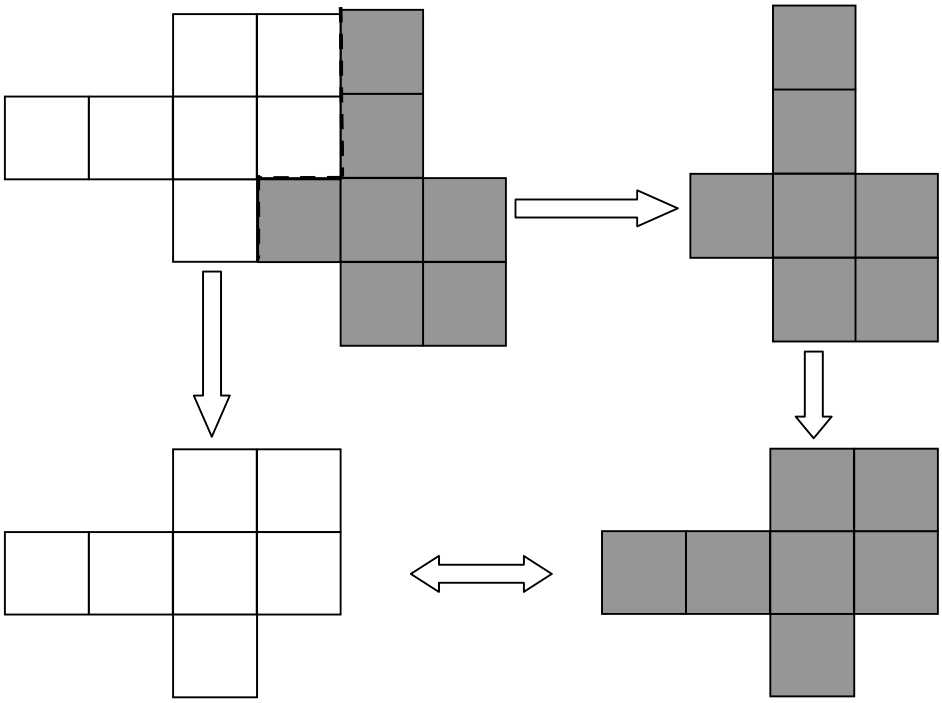
?! Якщо заробітну плату робітника спочатку збільшили на 10%, а потім зменшили на 10%, то чи зміниться і як заробітна плата?

Задача 2.

Умовою задачі вимагається розрізати дану фігуру на дві «рівні частини». Рівні частини слід розуміти не в сенсі «частин рівних площ», а в сенсі рівних фігур.

Нагадаємо, що дві фігури на площині називають рівними, якщо їх можна сумістити («повністю накласти одну на одну») за допомогою певного «руху».

Необхідне розрізання даної фігури та «суміщення» двох одержаних фігур (пофарбованої і непофарбованої) проілюстровано на рисунку нижче.



?! Чи рівними є чорна та біла фігури-«коми» на рисунку нижче?

Задача 3.

Нехай x — чисельник шуканого дробу, а y — його знаменник. Оскільки за умовою $\frac{x}{y}$ є нескоротним дробом, то натуральні числа x і y є взаємно простими.

За умовою одночасне збільшення чисельника і знаменника дробу $\frac{x}{y}$ (на числа 21 і 28 відповідно) не змінює його значення. Тому має місце пропорція

$$\frac{x+21}{y+28}=\frac{ax}{ay},$$

де a – коефіцієнт пропорційності, який виникає після відповідних змін чисельника та знаменника.

Отже, маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+21=ax \\ y+28=ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1+\frac{21}{x} \\ a=1+\frac{28}{y} \end{cases} \overset{\text{прирівнюємо}}{\Rightarrow} 1+\frac{21}{x}=1+\frac{28}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{21}{x}=\frac{28}{y} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

Нехай $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ – два рівні між собою звичайні дроби, причому $a>c$. Тоді мають місце рівності

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}, \qquad (7.3.1)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}. \qquad (7.3.2)$$

Дійсно, покладемо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda$. Звідки $a=b\lambda$, $c=d\lambda$. Тому

$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{b\lambda\pm d\lambda}{b\pm d}=\frac{\lambda(b\pm d)}{b\pm d}=\lambda.$$

З урахуванням (7.3.2), задачу 3 можна розв'язати наступним чином. Оскільки $\frac{x+21}{y+28}=\frac{x}{y}$, то

$$\frac{x+21}{y+28}=\frac{x}{y}=\frac{x+21-x}{y+28-y}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

Задача 4.

За властивістю степенів з натуральним показником маємо наступну числову рівність

$$99^{20} = 99^{2\cdot 10} = (99^2)^{10} = 9801^{10}.$$

Оскільки $9999 > 9801$, то $\dfrac{9999}{9801} > 1$. І тому $\left(\dfrac{9999}{9801}\right)^{10} > 1$ як добуток десяти множників, кожен з яких є більшими за одиницю.

З іншого боку, оскільки $\dfrac{9999^{10}}{9801^{10}} = \left(\dfrac{9999}{9801}\right)^{10} > 1$, то $9999^{10} > 9801^{10}$.

Отже, $9999^{10} > 99^{20}$.

Відповідь: $9999^{10} > 99^{20}$.

Задача 5.

Нехай $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} =$

$$= a_1 \cdot 10^5 + a_2 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^2 + a_5 \cdot 10^1 + a_6$$

– шукане шестизначне число, де $a_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $a_1 \neq 0$.

Тоді очевидно, що сума $S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ його цифр набуває найменше значення рівне 1 (коли шестизначне число є числом 100000) та найбільше значення, рівне $54 = 6 \cdot 9$ (коли шестизначне число є числом 999999).

Оскільки $100000 = 8 \cdot 12500$, то найменше значення суми цифр шестизначного числа, яке ділиться на 8, становить 1.

`З’ясуємо тепер питання щодо найбільшого значення суми цифр шестизначного числа, яке ділиться на 8.`

Оскільки $999000 = 8 \cdot 124875$, то сума S_6 набуває найбільшого значення, коли три останні цифри числа $\overline{999a_4a_5a_6}$ утворюють тризначне число $\overline{a_4a_5a_6}$, яке ділиться на 8 та має найбільше значення суми цифр $S_3 = a_4 + a_5 + a_6$.

Міркування проведемо методом виключення:

1) найбільше значення **27** суми S_3 досягається лише для числа 999, проте воно не ділиться на 8;

2) значення **26** досягається виключно набором цифр $\{8;9;9\}$, проте жодне з тризначних чисел 899, 989, 998 не ділиться на 8;

3) значення **25** досягається виключно набором цифр $\{8;8;9\}$ або $\{7;9;9\}$, проте жодне з чисел 889, 898, 988, 799, 979, 997 не ділиться на 8;

4) значення **24** досягається виключно наборами цифр $\{8;8;8\}$, $\{7;8;9\}$ або $\{6;9;9\}$. Жодне з чисел 789, 798, 879, 897, 978, 987; 699, 969, 996 не ділиться на 8. Число 888 ділиться на 8. Тому найбільше значення суми цифр тризначного числа, яке ділиться на 8, становить 24.

Таким чином найбільше значення суми цифр шестизначного числа, яке ділиться на 8, становить $27 + 24 = 51$.

Відповідь: 1 і 51 відповідно.

?! Якою буде відповідь для n-значного числа, $n > 6$.

А чи звертали Ви увагу?

$9 \times 1 = 9$, $0 + 9 = 9$; $9 \times 11 = 99$, $9 + 9 = 18$, 1+8=9;
$9 \times 2 = 18$, $1 + 8 = 9$; ...
$9 \times 3 = 27$, $2 + 7 = 9$;
$9 \times 4 = 36$, $3 + 6 = 9$;
$9 \times 5 = 45$, $4 + 5 = 9$;
$9 \times 6 = 54$, $5 + 4 = 9$;
$9 \times 7 = 63$, $6 + 3 = 9$;
$9 \times 8 = 72$, $7 + 2 = 9$;
$9 \times 9 = 81$, $8 + 1 = 9$;
$9 \times 10 = 90$, $9 + 0 = 9$.

---

8 клас

Задача 1.

I спосіб *(метод групування)*

$$\begin{aligned}
x^3+2x^2-3 &= \\
&= x^3-x^2+3x^2-3= \\
&= x^2(x-1)+3(x^2-1)= \\
&= x^2(x-1)+3(x-1)(x+1)= \\
&= (x-1)(x^2+3x+3).
\end{aligned}$$

II спосіб *(метод групування)*

$$\begin{aligned}
x^3+2x^2-3 &= \\
&= x^3-1+2x^2-2= \\
&= x^3-1+2(x^2-1)= \\
&= (x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)(x+1)= \\
&= (x-1)(x^2+x+1+2x+2)= \\
&= (x-1)(x^2+3x+3).
\end{aligned}$$

III спосіб *(метод «невизначених коефіцієнтів»)*

Оскільки рівняння третього степеня ($a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$) завжди має принаймні один дійсний корінь, то многочлен третього степеня $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, зокрема даний, завжди має хоча б один дійсний «ноль» (тобто таке значення x_0 змінного x , при якому $f(x_0)=0$). І тому даний многочлен третього степеня можна подати у вигляді

$$x^3+2x^2-3=(x-a)(x^2+bx+c)=x^3+x^2(b-a)+x(c-ab)-ac,$$

де a,b,c – дійсні числа; причому a – дійсний ноль многочлена x^3+2x^2-3 .

Два многочлени одного степеня «співпадають» (є тотожно рівними) тоді і лише тоді, коли рівними є їх відповідні коефіцієнти. Тому має місце система рівнянь з трьома змінними a, b, c

$$\begin{cases} b - a = 2 \\ c - ab = 0 \\ -ac = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ ab = c \\ ac = 3. \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Не важко перевірити, що трійка $a = 1$; $b = 3$; $c = 3$ є розв'язком цієї системи. Таким чином

$$x^3 + 2x^2 - 3 = (x - a)(x^2 + bx + c) = (x - 1)(x^2 + 3x + 3).$$

Відповідь: $x^3 + 2x^2 - 3 = (x - 1)(x^2 + 3x + 3)$.

Зауважимо, що «знаходження» зазначеної трійки чисел носить характер «вгадування». Тоді як ця трійка повинна бути одержана в результаті покрокового розв'язування системи $(8.1.1)$.

З метою дотримання належного рівня математичної строгості, спробуємо знайти дійсні розв'язки системи $(8.1.1)$. Отже

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ ab = c \\ ac = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ a(a + 2) = c \\ c = \frac{3}{a}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ a(a + 2) = \frac{3}{a} \\ c = \frac{3}{a}. \end{cases} \Rightarrow a^2(a + 2) = 3.$$

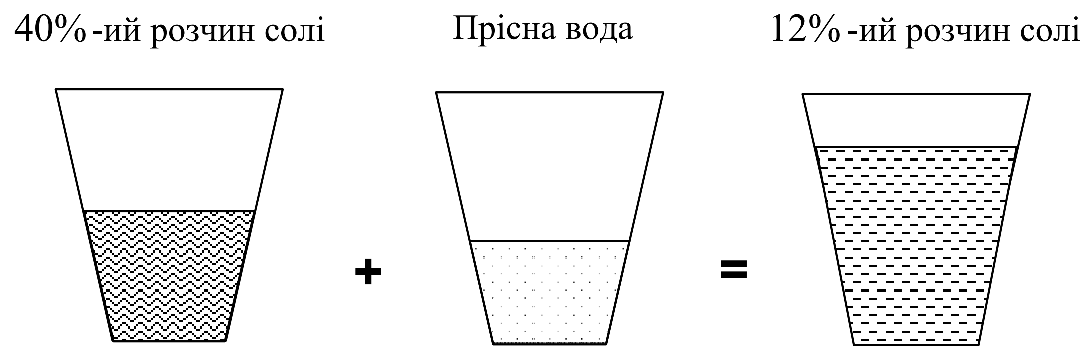
Звідки

$$a^3 + 2a^2 - 3 = 0. \tag{8.1.2}$$

Таким чином, розв'язування системи $(8.1.1)$ звелось до розв'язування рівняння $(8.1.2)$. Співставляючи рівняння $(8.1.2)$ та даний многочлен $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ бачимо, що метод «невизначених коефіцієнтів» в даному випадку не дає бажаного результату оскільки призводить до початкової задачі. Іншими словами — розкладання многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ (третього степеня) на множники звелось до задачі про знаходження дійсного кореня (відповідного) рівняння $x^3 + 2x^2 - 3 = 0$.

Питанню про способи розв'язування рівнянь третього степеня буде приділено увагу у наступних випусках серії.

Задача 2.



Нехай x — маса солі (в грамах), яка міститься у 600 грамах 40% розчину солі. Тоді має місце пропорція

$$x : 600 = 40 : 100.$$

Звідки

$$x = \frac{600 \cdot 40}{100} = 240.$$

($240 = 600 \cdot 0,4$ – задача на «`знаходження відсотка від числа`»)

Нехай далі y — загальна маса (у грамах) 12% розчину солі. Оскільки в y грамах такого розчину міститься точно 240 грамів солі, то має місце пропорція

$$240 : y = 12 : 100.$$

Звідки

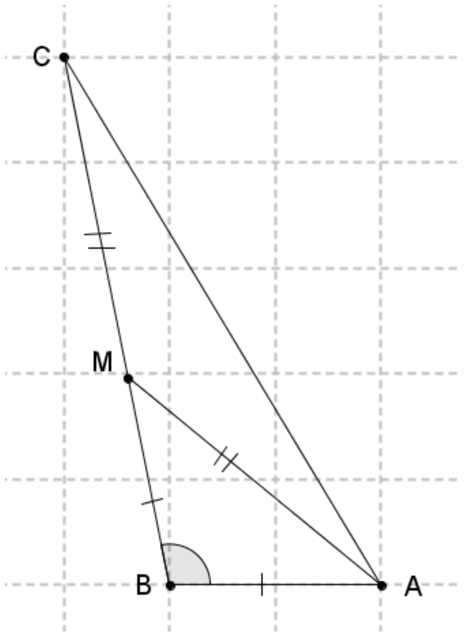
$$y = \frac{240 \cdot 100}{12} = 2000.$$

($2000 = 240 : 0,12$ – задача на «`знаходження числа за його відсотком`»)

Для знаходження шуканої маси води (у грамах), яку необхідно додати до 600 грамів 40% розчину солі, щоб отримати 12% розчин солі, необхідно обчислити різницю $2\,000 - 600 = 1\,400$.

Відповідь: $1\,400$ грам.

Задача 3.



Дано: $\triangle ABC$; $M \in BC$,
$AM = MC, AB = BM, \angle B = 100^0$.
Знайти: $\angle A$, $\angle C$.

Розв'язування.

1) Розглянемо $\triangle ABM$. В ньому: $AB = BM, \angle B = 100^0$ (за умовою). Оскільки трикутник є рівнобедреним з основою AM, то $\angle BAM = \angle BMA$. Тоді за теоремою про суму кутів трикутника має місце рівність $2\angle BAM + \angle B = 180^0$. Звідки

$$\angle BMA = \frac{180^0 - \angle B}{2} = 40^0.$$

2) Оскільки кути BMA і CMA є суміжними (за визначенням), то за властивістю суміжних кутів має місце рівність $\angle CMA + \angle BMA = 180^0$. Звідки

$$\angle CMA = 180^0 - 40^0 = 140^0.$$

3) Розглянемо $\triangle AMC$. В ньому: $AM = MC$ (за умовою), а $\angle AMC = 140^\circ$ (за 2-им пунктом). Оскільки трикутник є рівнобедреним з основою AC, то $\angle MAC = \angle MCA$. Тоді за теоремою про суму кутів трикутника має місце рівність $2\angle MAC + \angle AMB = 180^0$. Звідки

$$\angle MAC = \frac{180^0 - \angle AMB}{2} = 20^0.$$

4) За умовою промінь $[AM)$ проходить між сторонами кута BAC. Тоді за аксіомою вимірювання кутів має місце рівність $\angle BAC = \angle BAM + \angle CAM$. Звідки

$$\angle BAC = 40^0 + 20^0 = 60^0.$$

Таким чином, $\angle BAC = 60^0$, $\angle BCA = 20^0$.

Відповідь: 60°, 20°.

Задача 4.

На яку цифру закінчується число 1999^{2005}?

1999^1 закінчується на 9;

1999^2 закінчується на 1;

1999^3 закінчується на 9;

1999^4 закінчується на 1;

1999^5 закінчується на 9;

1999^6 закінчується на 1;

1999^7 закінчується на 9;

1999^8 закінчується на 1;

Очевидно, що простежується чітка закономірність чергування останніх цифр наведених степенів числа 1999. Звідки можна зробити висновок: число 1999^n закінчується на 1, якщо n є парним натуральним числом та закінчується на 9, якщо n є непарним натуральним числом.

Отже, число 1999^{2005} закінчується цифрою 9.

Відповідь: 9.

?! На яку цифру закінчується число 2012^{2013}?

Задача 5.

В якості **прикладу** розглянемо четвірку натуральних чисел: 1, 3, 7, 9. Не важко перевірити, що сума будь-яких трьох із них є простим числом:

$$1+3+7=11; \quad 1+3+9=13; \quad 1+7+9=17; \quad 3+7+9=19.$$

Отже, наведений приклад ілюструє існування принаймні однієї четвірки натуральних чисел, що задовольняють умову задачі. Тим самим показано, що найбільше число n різних натуральних чисел, сума будь-яких трьох з яких є простим числом, задовольняє умову $n \geqslant 4$.

Нижче доведемо, що кількість різних натуральних чисел, сума будь-яких трьох з яких є простим числом (далі – «максимальний набір»), не може бути більшою за 4 (чотири).

Для цього наведемо низку очевидних умовиводів.

1. Як відомо, кожне натуральне число при ділені на 3 має одну з трьох остач: 0, 1 або 2.

2. Оскільки сума будь-яких трьох різних натуральних чисел «максимального набору» повинна бути простим числом, то вона не може ділитися на число 3 (три).

3. Якщо кожне з трьох натуральних чисел має однакову остачу при ділені на 3, то сума трьох таких чисел ділиться на три. Дійсно:

3.1 $(3a+0)+(3b+0)+(3c+0)=3(a+b+c)$, $\quad a,b,c \in N \cup \{0\}$;

3.2 $(3a+1)+(3b+1)+(3c+1)=3(a+b+c+1)$, $\quad a,b,c \in N \cup \{0\}$;

3.3 $(3a+2)+(3b+2)+(3c+2)=3(a+b+c+2)$, $\quad a,b,c \in N \cup \{0\}$.

4. Якщо три натуральні числа мають різні остачі при ділені на 3, то їх сума ділиться на три. Дійсно:

$$(3a+0)+(3b+1)+(3c+2)=3(a+b+c+1)\,,\quad a,b,c \in N \cup \{0\}\,.$$

Таким чином, серед чисел «максимального набору»

1) не може бути трьох чисел з однаковою остачею при діленні на три;

2) не може бути трьох чисел з різними остачами при діленні на три.

Отже, серед чисел «максимального набору» може зустрітися лише два з трьох варіантів залишків. Причому кожен з таких двох варіантів залишків может бути представлений не більше, ніж двома числами. І тому, з урахуванням наведеного прикладу, максимальна кількість різних натуральних чисел, сума будь-яких трьох з яких є простим числом, дорівнює 4 (чотири).

Відповідь: 4.

А чи звертали Ви увагу?

$(a+b)^1=$	$1a+1b$
$(a+b)^2=$	$1a^2+2a^1b^1+1b^2$
$(a+b)^3=$	$1a^3+3a^2b^1+3a^1b^2+1b^3$
$(a+b)^4=$	$1a^4+4a^3b^1+6a^2b^2+4a^1b^3+1b^4$

…

«**Трикутник ПАСКАЛЯ**»

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

9 клас

Задача 1.

I спосіб

$$\sqrt{\left(-2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=$$
$$=\left|-2-\sqrt{5}\right|+\left|2-\sqrt{5}\right|=\left|2+\sqrt{5}\right|+\left|\sqrt{5}-2\right|=2+\sqrt{5}+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}\,.$$

II спосіб

Оскільки $\left(-2-\sqrt{5}\right)^2=9+4\sqrt{5}$, $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$, то

$$\sqrt{\left(-2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}.$$

Нехай далі $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}=A$, тоді

$$9+4\sqrt{5}+2\sqrt{9+4\sqrt{5}}\sqrt{9-4\sqrt{5}}+9-4\sqrt{5}=A^2.$$

Звідки

$$18+2\sqrt{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}=A^2,$$

або ж

$$18+2\sqrt{9^2-(4\sqrt{5})^2}=A^2,$$
$$18+2=A^2, A^2=20.$$

І тому

$$A=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$$

Відповідь: $2\sqrt{5}$.

Доповнення. Нехай $b\geqslant a^2\geqslant 0, a\geqslant 0$. Спростіть вираз

$$\sqrt{\left(-a-\sqrt{b}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\sqrt{b}\right)^2}.$$

Задача 2.

Оскільки при будь-яких $x, y \in R$ кожен з доданків лівої частини рівняння $(3x+2y-4)^2 + |3x-5y+3| = 0$ є невід'ємною величиною (перший – як степінь з парним натуральним показником, другий – за визначенням модуля), а сума двох невід'ємних дійсних чисел дорівнює нулю лише за умов рівності нулю кожного з доданків, то дане рівняння є рівносильним системі рівнянь

$$\begin{cases} (3x+2y-4)^2 = 0, \\ |3x-5y+3| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-4 = 0, \\ 3x-5y+3 = 0. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} 7y-7=0, \\ 3x-5y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1, \\ 3x-5y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1, \\ 3x-5+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким чином, розв'язком даного рівняння з двома змінними x, y є пара чисел $x = \frac{2}{3}$ та $y = 1$.

Відповідь: $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

А чи звертали Ви увагу?

Нехай маємо систему двох рівнянь першого степеня з двома змінними

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Якщо $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система завжди має єдиний розв'язок

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta}.$$

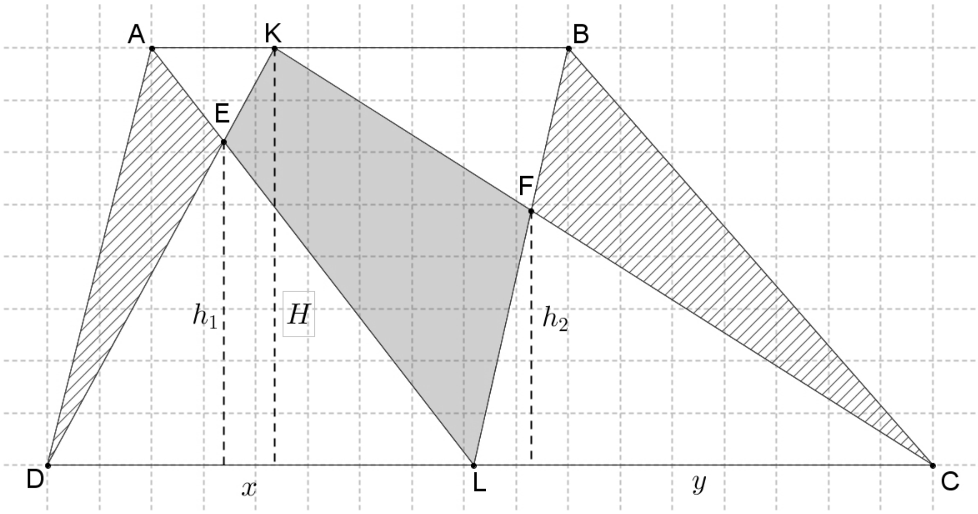
Якщо $\Delta = 0$, то можливими є два випадки:
якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків – «цілу пряму» розв'язків виду

$$x \in R, \quad y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1};$$

якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ або ж $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язків.

Задача 3.

І спосіб



Введемо наступні позначення: h_1 — висота $\triangle DEL$, h_2 — висота $\triangle LFC$, H — висота трапеції, $x = DL$ та $y = LC$.

Тоді маємо:

$$S_{\triangle ADE} = S_{\triangle DAL} - S_{\triangle DEL} = \frac{1}{2}Hx - \frac{1}{2}h_1 x,$$

$$S_{\triangle BCF} = S_{\triangle LBC} - S_{\triangle LFC} = \frac{1}{2}Hy - \frac{1}{2}h_2 y.$$

Таким чином сума площ трикутників $\triangle ADE$ та $\triangle BCF$ дорівнює:

$$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BCF} =$$

$$= \frac{1}{2}Hx - \frac{1}{2}h_1 x + \frac{1}{2}Hy - \frac{1}{2}h_2 y = \frac{1}{2}H(x+y) - \frac{1}{2}h_1 x - \frac{1}{2}h_2 y. \qquad (9.3.1)$$

Знайдемо площу чотирикутника $EKFL$:

$$S_{EKFL} = S_{\triangle DKC} - S_{\triangle DEL} - S_{\triangle LFC} =$$

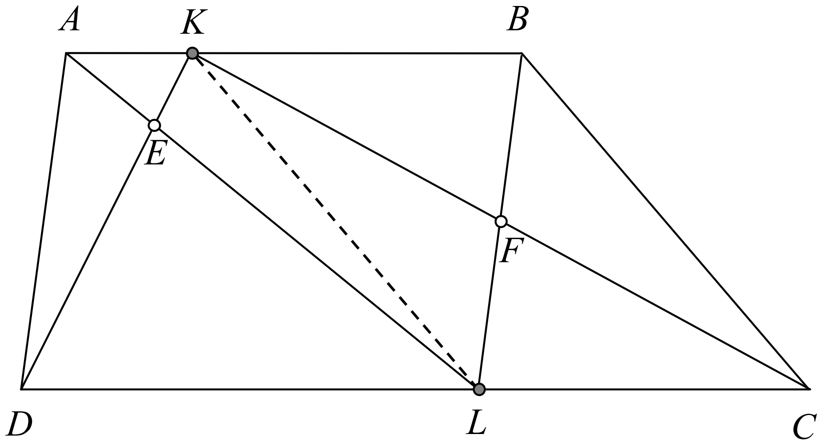
$$= \frac{1}{2}H(x+y) - \frac{1}{2}h_1 x - \frac{1}{2}h_2 y. \qquad (9.3.2)$$

Зі співвідношень (9.3.1) і (9.3.2) маємо рівність

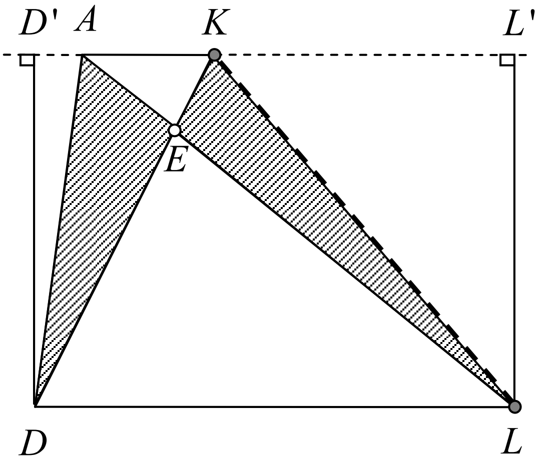
$$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BCF} = S_{EKFL}.$$

$\square$

II спосіб



Для доведення рівності $\boxed{S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BFC}=S_{ELFK}}$ покажемо рівність площ трикутників ADE і ELK та KLF і FCB.



1) Оскільки за умовою $ABCD$ – трапеція з основами AB і CD, $K\in AB$, $L\in CD$, то чотирикутник $AKLD$ також є трапецією.

2) Розглянемо трикутники AKD і AKL. В них: AK – спільна сторона; а довжини висот, опущених з вершин D і L на спільну сторону AK, є рівними як довжини висот трапеції. Тому

$$S_{\triangle ADK}=\frac{1}{2}AK\cdot DD'=\frac{1}{2}AK\cdot LL'=S_{\triangle ALK}.$$

Оскільки трикутник AKE є спільною частиною трикутників AKD і AKL, то $S_{\triangle ADK}-S_{\triangle AKE}=S_{\triangle ALK}-S_{\triangle AKE}$. Звідки

$$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ELK}. \tag{9.3.3}$$

3) В аналогічний спосіб не важко показати, що

$$S_{\triangle KLF}=S_{\triangle BFC}. \tag{9.3.4}$$

З урахуванням (9.3.3) і (9.3.4) має місце рівність

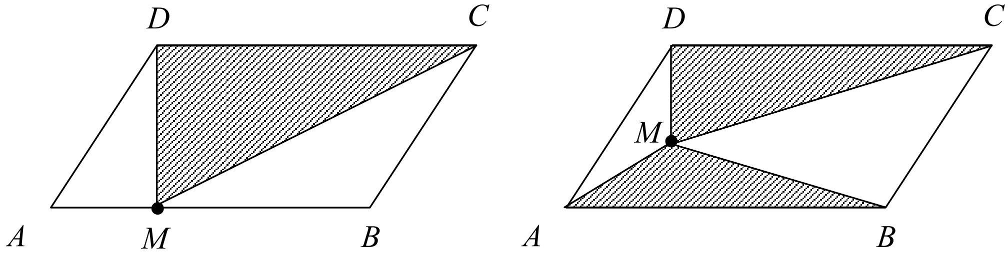
$$S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BFC}=S_{\triangle ELK}+S_{\triangle KLF}=S_{ELFK}. \tag{9.3.5}$$

□

Доповнення.

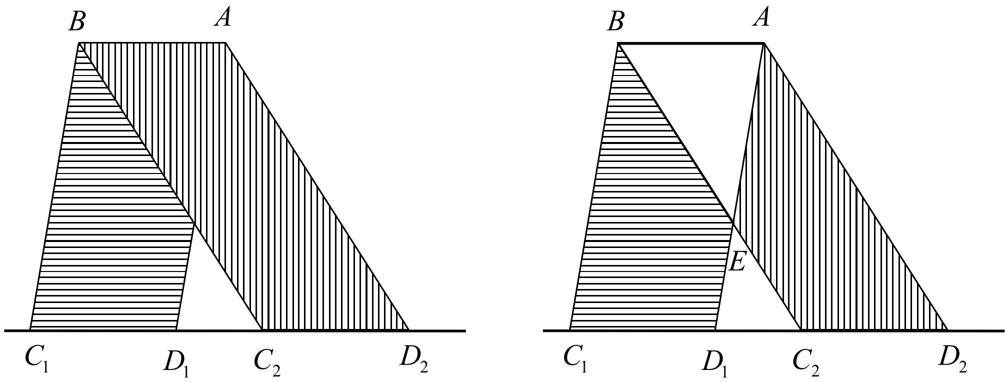
1) Нехай $ABCD$ – паралелограм, M – довільна точка на стороні AB. Доведіть, що $S_{\triangle DMC} = S_{\triangle DAM} + S_{\triangle CMB}$.

2) Нехай $ABCD$ – паралелограм, M – довільна внутрішня його точка. Доведіть, що $S_{\triangle DMC} + S_{\triangle MAB} = S_{\triangle DAM} + S_{\triangle CMB}$.



3) Нехай ABC_1D_1 і ABC_2D_2 – два паралелограми зі сторонами C_1D_1 і C_2D_2 на одній прямій, $E = BC_2 \cap AD_1$.

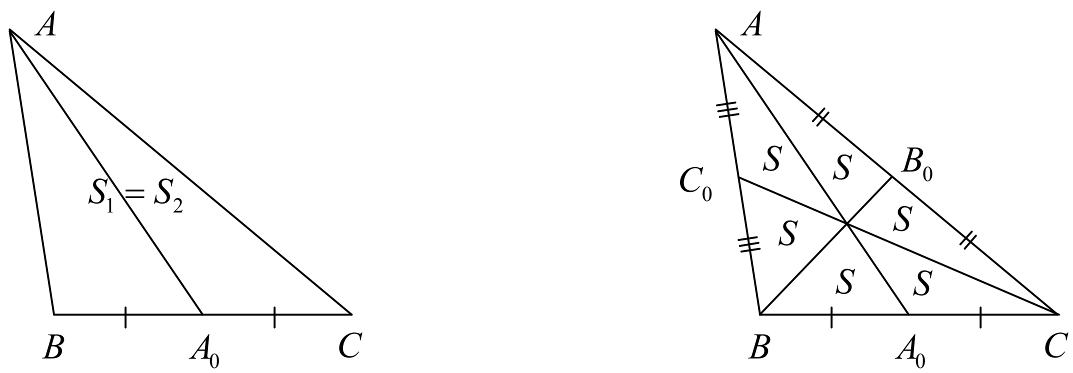
Доведіть, що $S_{ABC_1D_1} = S_{ABC_2D_2}$; $S_{BC_1D_1E} = S_{AEC_2D_2}$.



А чи звертали Ви увагу?

Медіана трикутника «утворює» два трикутники рівних площ.

Медіани трикутника «утворюють» шість трикутників рівних площ.



Задача 4.

Виконаємо (необхідні) однакові перетворення над обома даними числовими виразами

$$\begin{aligned}
\sqrt{34}+5 &\ \square\ \sqrt{54}+3\\
\sqrt{34}+2 &\ \square\ \sqrt{54}\\
(\sqrt{34}+2)^2 &\ \square\ (\sqrt{54})^2\\
34+2+4\sqrt{34} &\ \square\ 54\\
36+4\sqrt{34} &\ \square\ 54\\
4\sqrt{34} &\ \square\ 18\\
2\sqrt{34} &\ \square\ 9\\
(2\sqrt{34})^2 &\ \square\ 9^2\\
4\cdot 34 &\ \square\ 81\\
136 &\ \square\ 81
\end{aligned}$$

Оскільки $136 > 81$, то мають місце наступні числові «нерівності-наслідки»:

$$\begin{aligned}
4\cdot 34 &> 81\\
(2\sqrt{34})^2 &> 9^2\\
2\sqrt{34} &> 9\\
4\sqrt{34} &> 18\\
36+4\sqrt{34} &> 54\\
34+2+4\sqrt{34} &> 54\\
(\sqrt{34}+2)^2 &> (\sqrt{54})^2\\
\sqrt{34}+2 &> \sqrt{54}\\
\sqrt{34}+5 &> \sqrt{54}+3
\end{aligned}$$

Отже $\sqrt{34}+5 > \sqrt{54}+3$.

Відповідь: $\sqrt{34}+5 > \sqrt{54}+3$.

Задача 5.

За умовою задачі для додатних a і b справджується нерівність

$$ab > 2011a + 2012b. \tag{9.5.1}$$

Доведемо, що для зазначених a і b має місце нерівність

$$a + b > \left(\sqrt{2011} + \sqrt{2012}\right)^2.$$

1) Оскільки $a > 0$, то нерівність (9.5.1) можна подати у вигляді

$$a > 2011 \cdot \frac{a}{b} + 2012 \tag{9.5.2}$$

2) Так само, з того що $b > 0$, нерівність (9.5.1) можна подати у вигляді

$$b > 2011 + 2012 \cdot \frac{b}{a} \tag{9.5.3}$$

3) Додавши ліві та відповідно праві частини нерівностей (9.5.2) і (9.5.3), матимемо

$$a + b > 2011 \cdot \frac{a}{b} + 2012 + 2011 + 2012 \cdot \frac{b}{a}$$

або ж

$$a + b > (2011 + 2012) + \left(2011 \cdot \frac{a}{b} + 2012 \cdot \frac{b}{a}\right). \tag{9.5.4}$$

3.1) За нерівністю Коші для другого доданка правої частини нерівності (9.5.4) маємо наступну оцінку

$$\left(2011 \cdot \frac{a}{b} + 2012 \cdot \frac{b}{a}\right) \geqslant 2\sqrt{2011 \cdot \frac{a}{b} \cdot 2012 \cdot \frac{b}{a}} = 2\sqrt{2011 \cdot 2012}. \tag{9.5.5}$$

3.2) Оскільки $2011 + 2012 + 2\sqrt{2011 \cdot 2012} =$

$$= \sqrt{2011}^2 + 2\sqrt{2011 \cdot 2012} + \sqrt{2012}^2 = \left(\sqrt{2011} + \sqrt{2012}\right)^2,$$

то з урахуванням (9.5.4) і (9.5.5), для даних a і b має місце нерівність

$$a + b > \left(\sqrt{2011} + \sqrt{2012}\right)^2. \tag{9.5.6}$$

$\square$

10 клас

Задача 1.

I спосіб *– за допомогою «оцінки знаку добутку через оцінку знаків множників»*

Очевидно, що областю допустимих значень (ОДЗ) нерівності

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|\left(x^2-x-6\right)\leqslant 0$$

є множина усіх дійсних чисел за винятком $x=0$, тобто $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Оскільки для кожного x із ОДЗ $\left|\frac{x-1}{x}\right|\geqslant 0$, то дана нерівність є рівносильною сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-6\leqslant 0,\\ \left|\frac{x-1}{x}\right|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+2)\leqslant 0,\\ \frac{x-1}{x}=0. \end{array}\right.$$

Звідки

$$\left[\begin{array}{l} -2\leqslant x\leqslant 3,\\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow x\in[-2;3].$$

З урахуванням ОДЗ остаточно маємо, що $x\in[-2;0)\cup(0;3]$.

II спосіб *– за допомогою рівносилиних «конструкцій-переходів» (по суті – модифікований I спосіб)*

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|\left(x^2-x-6\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-6\leqslant 0,\\ \left|\frac{x-1}{x}\right|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+2)\leqslant 0,\\ \frac{x-1}{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

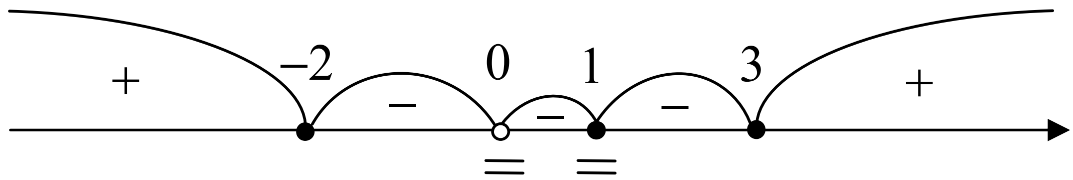
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\leqslant x\leqslant 3,\\ \left\{\begin{array}{l} x=1,\\ x\neq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2\leqslant x\leqslant 3,\\ x\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x\in[-2;0)\cup(0;3].$$

III спосіб *– за допомогою «методу інтервалів»*

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|\left(x^2-x-6\right)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|x-1|\cdot(x-3)(x+2)}{|x|}\leqslant 0.$$

Відмітимо нулі чисельника і нулі знаменника на координатній прямій відповідним чином (незалежно від знака нерівності нулі знаменника «виколюємо», а нулі чисельника – «замальовуємо» (бо знак нерівності нестрогий)) та з'ясуємо (встановимо) знак лівої частини нерівності на кожному з одержаних проміжків.

Примітка: нуль чисельника $x=1$ та нуль знаменника $x=0$ (наслідуючи термінологію «методу інтервалів») слід розглядати як «подвійні» точки (бо при переході через них знак лівої частини нерівності не змінюється). Крім того, оскільки коефіцієнти при старших членах у кожному з незвідних множників (на які розкладено чисельник і знаменник) є додатними числами та серед сталих (числових) множників лівої частини немає від'ємних множників, то рухаючись від крайнього правого проміжку до крайнього лівого проміжку (на числовій осі) знаки інтервалів чередуються ($+$, $-$ ...) крім випадків переходу через подвійні точки.



З урахуванням знаку нерівності ($\leqslant$) та відповідних знаків ($-$) на проміжках маємо, що $x\in[-2;0)\cup(0;1]\cup[1;3]$. Або, що теж саме $x\in[-2;0)\cup(0;3]$.

Відповідь: $x\in[-2;0)\cup(0;3]$.

Задача 2.

$$\begin{cases} x+(y-2)^{2012}=z, \\ y+(z-2)^{2012}=x, \\ z+(x-2)^{2012}=y. \end{cases}$$

Додавши ліві та відповідно праві частини рівнянь системи, одержимо рівняння-наслідок

$$x+(y-2)^{2012}+y+(z-2)^{2012}+z+(x-2)^{2012}=z+x+y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^{2012}+(z-2)^{2012}+(x-2)^{2012}=0.$$

Оскільки при будь-яких $x,y,z\in R$ кожен доданок лівої частини останнього рівняння є невід'ємною величиною (як степінь з парним натуральним показником), а сума трьох невід'ємних дійсних чисел дорівнює нулю лише за умов рівності нулю кожного з доданків, то це рівняння є рівносильним системі рівнянь

$$\begin{cases} (y-2)^{2012}=0, \\ (z-2)^{2012}=0, \\ (x-2)^{2012}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0, \\ z-2=0, \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ z=2, \\ x=2. \end{cases}$$

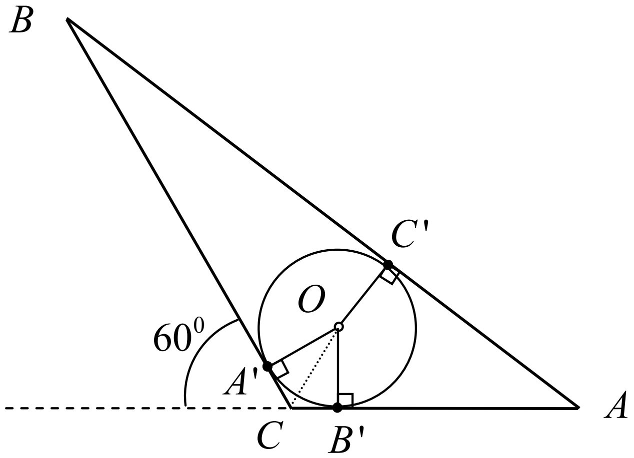
Не важко перевірити, що трійка $x=2$, $y=2$, $z=2$ є розв'язком даної системи. Отже, єдиним розв'язком даної системи є трійка $(2;2;2)$.

Відповідь: $(2;2;2)$.

Задача 3.

І спосіб

Нехай O – центр кола ω, вписаного у $\triangle\ ABC$. Позначимо через A', B' і C' точки дотику кола ω зі сторонами BC, AC і AB відповідно. Нехай далі a, b і c – довжини сторін BC, AC і AB. Тоді $2p=a+b+c$ – периметр $\triangle\ ABC$. За умовою $\angle C=120^0$. Доведемо, що довжина відрізка CO дорівнює $2(p-c)$.



1) Нехай $CB' = x$. Тоді $B'A = b - x$. Оскільки CB' і CA' є відрізками дотичних, проведених через точку C до кола ω, то $CA' = CB' = x$. Тому $A'B = a - x$. Так само за властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, мають місце рівності

$$\begin{cases} BC' = BA' = a - x, \\ AC' = AB' = b - x. \end{cases}$$

За аксіомою вимірювання відрізків має місце рівність $AB = AC' + C'B$. Звідки маємо рівняння

$$c = (a - x) + (b - x) \Leftrightarrow c = a + b - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a + b - c}{2}.$$

Отже, згідно введених позначень, $x = p - c$

2) Розглянемо прямокутні трикутники $CA'O$ і $CB'O$. Оскільки (за доведеним раніше) $CA' = CB'$, а CO – спільна гіпотенуза, то за катетом і гіпотенузою ці трикутники є рівними. Тому $\angle A'CO = \angle B'CO$. За умовою $\angle A'CB' = \angle C = 120^0$. Тому, як наслідок із аксіоми вимірювання кутів, має місце рівність

$$\angle A'CO = \angle B'CO = \frac{120^0}{2} = 60^0.$$

3) Розглянемо прямокутний трикутник $CB'O$. В ньому: $CB' = p - c$, $\angle B'CO = 60^0$. За властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle COB' = 30^0$. І тому (за властивістю прямокутного трикутника з кутом 30^0) довжина гіпотенузи CO вдвічі більша ніж довжина катета CB'. Таким чином $CO = 2CB' = 2(p - c)$. □

II спосіб

Нехай O – центр кола ω, вписаного у $\triangle\ ABC$. Позначимо через A' і B' C' точки дотику кола ω зі сторонами BC і AC відповідно. Нехай далі a, b і c – довжини сторін BC, AC і AB. Тоді $2p = a + b + c$ – периметр $\triangle\ ABC$.

1) Розглянемо прямокутні трикутники $CA'O$ і $CB'O$:

1.1) за властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, має місце рівність $CA' = CB'$,

2.1) CO – спільна гіпотенуза.

Таким чином, за катетом і гіпотенузою трикутники $CA'O$ і $CB'O$ є рівними. Тому $\angle A'CO = \angle B'CO$. За умовою $\angle A'CB' = \angle C = 120^0$. Тому, як наслідок із аксіоми вимірювання кутів, має місце рівність

$$\angle A'CO = \angle B'CO = \frac{120^0}{2} = 60^0.$$

2) Розглянемо прямокутний трикутник $CB'O$. В ньому: $OB' = r$, де r – радіус вписаного кола; $\angle B'CO = 60^0$. За властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle COB' = 30^0$. Нехай $CO = x$. Тоді за визначенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника має місце рівність

$$\cos(\angle COB') = \frac{OB'}{CO}.$$

Звідки маємо, що $\cos 30^0 = \frac{r}{x}$, або ж $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{x}$. Тому

$$x = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}r}{3}. \tag{10.3.1}$$

3) Площу $\triangle\ ABC$ можна обчислити за формулою $S_{\triangle ABC} = pr$. Звідки

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p}. \tag{10.3.2}$$

За іншою формулою $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin\angle C$. Звідки

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin 120^0 = \frac{ab\sqrt{3}}{4}. \tag{10.3.3}$$

З урахуванням $(10.3.1)$, $(10.3.2)$ і $(10.3.3)$ маємо, що

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{ab\sqrt{3}}{4p} = \frac{ab}{2p}. \tag{10.3.4}$$

4) Покажемо, що для $\triangle\, ABC$ з $\angle C = 120^0$ справджується рівність

$$\frac{ab}{2p} = 2(p-c). \qquad (10.3.5)$$

За теоремою косинусів для $\triangle\ ABC$ з $\angle C = 120^0$ маємо рівність $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^0 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + b^2 + ab\,.$

Тому

$c^2 = a^2 + b^2 + ab \Leftrightarrow ab = a^2 + b^2 + 2ab - c^2 \Leftrightarrow ab = (a+b)^2 - c^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ab = (a+b+c)(a+b-c) \Leftrightarrow ab = 2p\cdot 2(p-c) \Leftrightarrow \frac{ab}{2p} = 2(p-c)\,.$

Таким чином, згідно введених позначень та справедливості рівностей $(10.3.4)$ і $(10.3.4)$, довжину відрізка CO даного трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$CO = 2(p-c).$$

Задача 4.

Позначимо число 2012 через x, тоді число $2011 = x - 1$. Тоді, згідно введених позначень, даний за умовою задачі числовий вираз набуває вигляду:

$$(x-1)^2 + (x-1)^2\cdot x^2 + x^2.$$

Наведемо наступний ланцюг рівностей

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (x-1)^2\cdot x^2 + x^2 = \\
&= (x\,(x-1))^2 + (x-1)^2 + x^2 = \\
&= (x^2-x)^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 = \\
&= (x^2-x)^2 + 2x^2 - 2x + 1 = \\
&= (x^2-x)^2 + 2(x^2-x) + 1 = \\
&= (x^2-x+1)^2.
\end{aligned}$$

Зробимо обернену заміну та отримаємо:

$$2011^2 + 2011^2\cdot 2012^2 + 2012^2 = (2011^2 - 2011 + 1)^2,$$

а це й доводить, що число $2011^2 + 2011^2\cdot 2012^2 + 2012^2$ можна подати у вигляді повного квадрату числа $n = 2011^2 - 2011 + 1\,.$

Відповідь: $n = 2011^2 - 2011 + 1\,.$

Задача 5.

Подамо дане за умовою задачі рівняння $x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2$ рівнянням виду

$$(x-1)(x+1) = 2y^2. \tag{10.5.1}$$

Оскільки шуканими x, y є прості натуральні числа, то права частина рівняння (10.5.1) є парним числом. А тому і ліва частина цього рівняння повинна бути парним числом.

Числа $(x-1)$, $(x+1)$ мають однакову парність. Тому їх добуток буде парним числом лише за умов, коли $(x-1) = 2m$, $m \in N$. Звідки $(x+1) = 2m+2$, а рівняння (10.5.1) набуває виду $2m(2m+2) = 2y^2$, або

$$2m(m+1) = y^2. \tag{10.5.2}$$

Оскільки ліва частина рівняння (10.5.2) є парним числом, то і права частина цього рівняння повинна бути парним числом. Існує єдине просте число, квадрат якого є парним числом. Це – число 2. Отже, $y = 2$.

Підставивши $y = 2$ у рівняння (10.5.1), одержимо $x^2 = 9$. Звідки $x = 3$ ($x = -3$ не є натуральним).

Таким чином, шуканими простими (натуральними) числами x, y, що задовольняють рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$, є числа $x = 3$ і $y = 2$.

Відповідь: $x = 3$, $y = 2$.

А чи звертали Ви увагу?

Будь-яке просте число $p > 3$ може бути представлене у вигляді

$$p = 6m - 1, \quad m \in N \qquad (\bigstar)$$

або ж у вигляді

$$p = 6m + 1, \quad m \in N \qquad (\bigstar\bigstar)$$

! Проте серед чисел виду $(\bigstar)$, $(\bigstar\bigstar)$ є й складені числа. Наприклад: 25, 65 та безліч інших складених чисел.

---

11 клас

Задача 1.

За умовою дано зведене квадратне рівняння

$$x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (2-a)x - (a+3) = 0 \qquad (11.1.1)$$

з параметром a відносно змінної x.

Знайдемо дискримінант цього рівняння

$$D = (2-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (a+3) = a^2 - 4a + 4 + 4a + 12 = a^2 + 16.$$

Оскільки при будь-яких значеннях параметра $a \in R$ дискримінант $D = a^2 + 16 \geqslant 16$, то дане квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра $a \in R$ завжди має два дійсні (причому різні) корені x_1 та x_2.

Тоді за теоремою Вієта для коренів (зведеного) рівняння (11.1.1) мають місце рівності

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2-a), \\ x_1 x_2 = -(a+3). \end{cases} \qquad (11.1.2)$$

Оскільки

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$$

то з урахуванням системи (11.1.2) маємо наступну рівність

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (2-a)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot (a+3) = \\ &= (a-2)^2 + 2(a+3) = \\ &= a^2 - 4a + 4 + 2a + 6 = \\ &= a^2 - 2a + 10 = \\ &= (a-1)^2 + 9. \end{aligned}$$

Отже, $x_1^2 + x_2^2 = (a-1)^2 + 9$. Не важко бачити, що (для коренів даного рівняння) значення $x_1^2 + x_2^2$ буде найменшим лише в тому випадку, коли $(a-1)^2 = 0$. Що можливо лише при $a = 1$.

Таким чином, сума квадратів кореней даного рівняння буде найменшою лише при $a = 1$.

Відповідь: 1.

ЗАУВАЖЕННЯ до задачі 1.

Нагадаємо зміст `теореми Вієта`
«**Якщо** квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ **має дійсні корені** x_1 та x_2, то мають місце рівності $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$».

Тому перед застосуванням рівностей (11.1.2) дослідження питання щодо існування дійсних кореней квадратного рівняння (з параметром) є обов'язковим!

Так наприклад, для рівняння $x^2+(2-a)x+\frac{1}{2}a^2-a+5=0$ дискримінант $D=-a^2-16$ і тому при будь-яких дійсних значеннях параметра a рівняння взагалі не має дійсних кореней, хоча формально можна обчислити значення виразу $(2-a)^2-2(\frac{1}{2}a^2-a+5)=...=-2a-6$.

Більше того, оскільки для квадратного рівняння з параметром a дискримінант є функцією від a ($D=D(a)$), то питання про найменше значення суми квадратів кореней цього рівняння повинно досліджуватись лише для тих значень параметра a, при яких $D(a)\geqslant 0$.

?! При яких значеннях параметра a сума квадратів кореней рівняння $x^2+(2-a)\,x-a+2=0$ буде найменшою? Знайдіть значення цієї суми.

?! Розв'яжіть задачу 1 без застосування теореми Вієта.

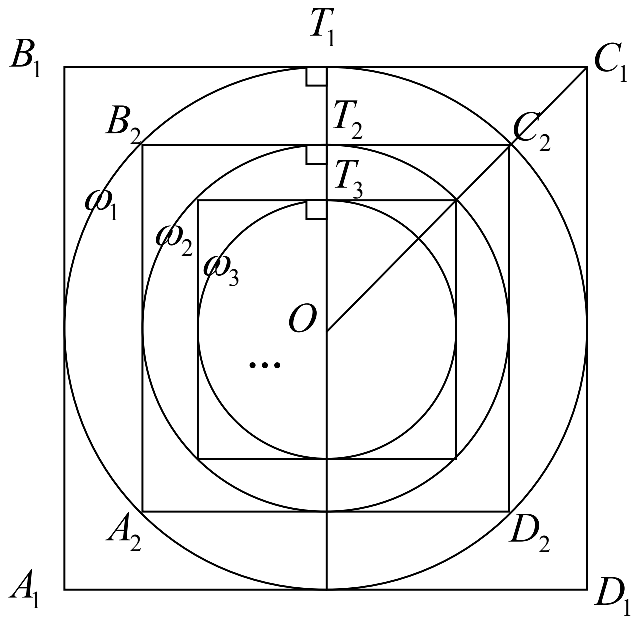
А чи звертали Ви увагу?

Якщо x_1 та x_2 – дійсні корені зведеного рівняння $x^2+px+q=0$, причому $x_2>x_1$, то

$$x_2-x_1=\sqrt{D},$$

де $D=p^2-4q$ – дискримінант цього рівняння.

Задача 2.



1) Нехай $A_1B_1C_1D_1$ – даний квадрат зі стороною a. Тоді площа S_1 цього квадрата дорівнює

$$S_1 = a^2 = \frac{a^2}{2^0}. \tag{11.2.1}$$

2) Позначимо через ω_1 коло, вписане у квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Тоді очевидно, що радіус R_1 кола ω_1 дорівнює $R_1 = \frac{a}{2}$.

Нехай далі $A_2B_2C_2D_2$ – квадрат, вписаний у коло ω_1. Тоді діагональ d_2 цього квадрата дорівнює діаметру кола ω_1. Тому $d_2 = a$. Якщо позначити через x_2 довжину сторони квадрата $A_2B_2C_2D_2$, то (за теоремою Піфагора) має місце рівність $x_2^2 + x_2^2 = d_2^2$, звідки $2x_2^2 = a$, $x_2 = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. І тому площа S_2 квадрата $A_2B_2C_2D_2$ дорівнює

$$S_2 = \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2^1}. \tag{11.2.2}$$

3) Позначимо через ω_2 коло, вписане у квадрат $A_2B_2C_2D_2$. Тоді очевидно, що радіус R_2 кола ω_2 дорівнює $R_2 = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2}}}{2}$.

Нехай далі $A_3B_3C_3D_3$ – квадрат, вписаний у коло ω_2. Тоді діагональ d_3 цього квадрата дорівнює діаметру кола ω_2. Тому $d_3 = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Якщо позначити через x_3 довжину сторони квадрата $A_3B_3C_3D_3$, то (за теоремою Піфагора) має місце рівність $x_3^2 + x_3^2 = \frac{a^2}{2}$, звідки $2x_3^2 = \frac{a^2}{2}$, $x_3 = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

І тому площа S_3 квадрата $A_3B_3C_3D_3$ дорівнює

$$S_3 = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2^2}. \qquad (11.2.3)$$

4) З урахуванням співвідношень $(11.2.1), (11.2.2), (11.2.3)$ можна висунути **ГІПОТЕЗУ** про те, що для натуральних n площу S_n квадрата $A_nB_nC_nD_n$ (який одержано в описаний за умовою задачі спосіб) можна обчислити за формулою

$$S_n = \frac{a^2}{2^{n-1}}. \qquad (11.2.4)$$

Висунуту гіпотезу доведемо індуктивним методом. А саме:

4.1) Для початкових $n = 1, 2, 3$ формула $(11.2.4)$ справджується на підставі встановлених рівностей $(11.2.1), (11.2.2), (11.2.3)$.

4.2) Припустимо що формула $(11.2.4)$ має місце для певного натурального $k > 3$ та доведемо що для $k+1$ формула $(11.2.4)$ також має місце. Іншими словами, ми припускаємо що площа S_k квадрата $A_kB_kC_kD_k$ дорівнює

$$S_k = \frac{a^2}{2^{k-1}}.$$

Тоді очевидно що довжина a_k сторони цього квадрата дорівнює

$$a_k = \sqrt{\frac{a^2}{2^{k-1}}}.$$

Позначимо через ω_k коло, вписане у квадрат $A_kB_kC_kD_k$. Тоді очевидно, що радіус R_k кола ω_k дорівнює

$$R_k = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2^{k-1}}}}{2}.$$

Нехай далі $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$ – квадрат, вписаний у коло ω_k. Тоді діагональ d_{k+1} цього квадрата дорівнює діаметру кола ω_k. Тому $d_k = \sqrt{\frac{a^2}{2^{k-1}}}$. Якщо позначити через x_{k+1} довжину сторони квадрата $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$, то (за теоремою Піфагора) має місце рівність

$$x_{k+1}^2 + x_{k+1}^2 = \frac{a^2}{2^{k-1}},$$

звідки $2x_{k+1}^2 = \dfrac{a^2}{2^{k-1}}$, $x_{k+1}^2 = \dfrac{a^2}{2^k}$,

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{a^2}{2^k}}.$$

І тому площа S_{k+1} квадрата $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$ дорівнює

$$S_{k+1} = \frac{a^2}{2^k} = \frac{a^2}{2^{(k+1)-1}}.$$

4.3) На підставі принципу математичної індукції та з урахуванням пунктів 4.1) і 4.2), справедливість формули (11.2.4) для натуральних n доведено.

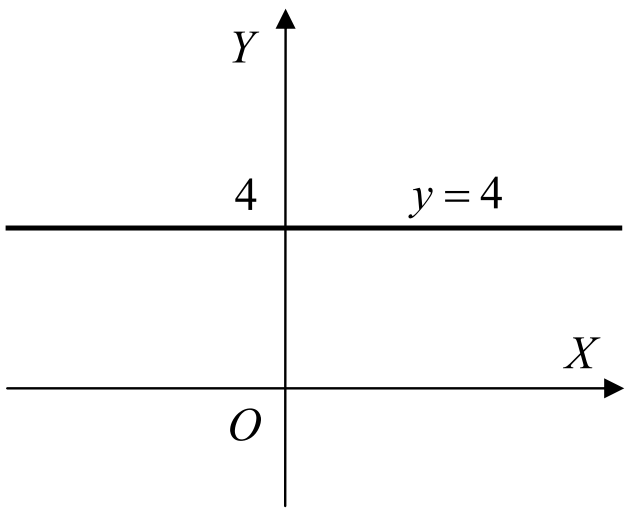
5) Оскільки за формулою (11.2.4) $S_{2012} = \dfrac{a^2}{2^{2011}}$, то

$$\frac{S_1}{S_{2011}} = 2^{2011}.$$

Відповідь: 2^{2011}.

Задача 3.

$$y = \sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3} =$$
$$= \sqrt{4\sin^4 x - 2(1 - 2\sin^2 x) + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2(2\cos^2 x - 1) + 3} =$$
$$= \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1} + \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} =$$
$$= \sqrt{(2\sin^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2\cos^2 x + 1)^2} = 2\sin^2 x + 1 + 2\cos^2 x + 1 = 4.$$



Задача 4.

За умовою для четвірки чисел x, y, u, v виконуються співвідношення $x^{20}+y^{20}=u^{20}+v^{20}$ і $x^{10}+y^{10}=u^{10}+v^{10}$. Тому має місце система рівнянь

$$\begin{cases} x^{20}+y^{20}=u^{20}+v^{20}, \\ x^{10}+y^{10}=u^{10}+v^{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{20}-u^{20}=v^{20}-y^{20}, \\ x^{10}-u^{10}=v^{10}-y^{10}. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} \left(x^{10}-u^{10}\right)\left(x^{10}+u^{10}\right)=\left(v^{10}-y^{10}\right)\left(v^{10}+y^{10}\right), \\ x^{10}-u^{10}=v^{10}-y^{10} \end{cases} \qquad (11.4.1)$$

Доведемо, що для кожної четвірки чисел, що є розв'язком системи $(11.4.1)$, виконується співвідношення

$$x^{2010}+y^{2010}=u^{2010}+v^{2010}. \qquad (11.4.2)$$

Очевидно, що для другого рівняння системи $(11.4.1)$ є лише два суттєво різні випадки: $x^{10}-u^{10}=v^{10}-y^{10}=0$ і $x^{10}-u^{10}=v^{10}-y^{10}\neq 0$.

Якщо $x^{10}-u^{10}=v^{10}-y^{10}=0$, то очевидно, що розв'язки цього «подвійного» рівняння є розв'язками і першого рівняння системи $(11.4.1)$, а тому і самої системи. Розв'язками (відповідної цьому подвійному рівнянню) системи $\begin{cases} u^{10}=x^{10}, \\ v^{10}=y^{10} \end{cases}$ є наступні четвірки:

$$\{x; y; u=+x; v=+y\},$$
$$\{x; y; u=-x; v=+y\},$$
$$\{x; y; u=+x; v=-y\},$$
$$\{x; y; u=-x; v=-y\},$$

кожна з яких задовольняє умову $(11.4.2)$.

Якщо ж $x^{10}-u^{10}=v^{10}-y^{10}\neq 0$, то система $(11.4.1)$ є рівносильною системі

$$\begin{cases} x^{10}+u^{10}=v^{10}+y^{10}, \\ x^{10}-u^{10}=v^{10}-y^{10}\neq 0. \end{cases} \qquad (11.4.3)$$

Звідки

$$\begin{cases} 2x^{10} = 2v^{10}, \\ x^{10} - u^{10} = v^{10} - y^{10} \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{10} = v^{10}, \\ u^{10} = y^{10}, \\ x^{10} \neq u^{10}. \end{cases}$$

Розв'язками останньої системи є наступні четвірки:

$$\{x; y; u = +y; v = +x\},$$
$$\{x; y; u = -y; v = +x\},$$
$$\{x; y; u = +y; v = -x\},$$
$$\{x; y; u = -y; v = -x\},$$

(з додатковими обмеженнями $u \neq \pm x$ і $v \neq \pm y$) кожна з яких також задовольняє умову $(11.4.2)$.

Таким чином, для кожної четвірки чисел, що є розв'язком системи $(11.4.1)$, виконується співвідношення $(11.4.2)$.

□

Задача 5.

За умовою $xyz = 1$, звідки $z = \frac{1}{xy}$. І тому

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+y\frac{1}{xy}} + \frac{1}{1+\frac{1}{xy}+x\frac{1}{xy}} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+\frac{1}{x}} + \frac{1}{1+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{\frac{x+xy+1}{x}} + \frac{1}{\frac{xy+1+x}{xy}} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} =$$
$$= \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.$$

Відповідь: 1.

ДОДАТКИ

Рівносильні перетворення деяких раціональних нерівностей

Всюди нижче $f(x), g(x)$ — деякі раціональні функції, $D(f)$, $D(g)$ — області визначення функцій f і g відповідно, $n \in N$.

1. $$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2. $$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3. $$f(x)g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

4. $$f(x)g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

5. $$\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)g(x) \geqslant 0, \\ g(x) \neq 0. \end{array}\right.$$

6. $$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leqslant 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

7. $$\left(f(x)\right)^{2n} g(x) > 0 \Leftrightarrow |f(x)|\, g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \neq 0, \\ x \in D(f). \end{cases}$$

8. $$\left(f(x)\right)^{2n} g(x) < 0 \Leftrightarrow |f(x)|\, g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \neq 0, \\ x \in D(f). \end{cases}$$

9. $$\left(f(x)\right)^{2n} g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow |f(x)|\, g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ x \in D(f) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f) \cap D(g), \\ \left[\begin{array}{l} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

10. $$\left(f(x)\right)^{2n} g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow |f(x)|\, g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leqslant 0, \\ x \in D(f) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f) \cap D(g), \\ \left[\begin{array}{l} g(x) \leqslant 0, \\ f(x) = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рівняння, які містять знак абсолютної величини

Абсолютну величину (модуль) дійсного числа a позначають $|a|$. Згідно з визначенням:

$$|a| = \left[\begin{array}{rl} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{array}\right.$$

Найпростіші властивості абсолютних величин (дійсних чисел) полягають у наступному:

1) $|ab| = |a||b|$; 2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; 3) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;

4) $|a+b| \geqslant |a| - |b|$; 5) $|a-b| \leqslant |a| + |b|$.

Часто при розв'язанні рівнянь та нерівностей доцільно використовувати наступні властивості модуля:

6) $\sqrt{a^2} = |a|$; 7) $|a| \leqslant |b| \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$;

8) $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a \cdot b \geqslant 0$; 9) $|a+b| < |a| + |b| \Leftrightarrow a \cdot b < 0$;

10) $|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow (a-b) \cdot b \geqslant 0$;

11) $|a-b| > |a| - |b| \Leftrightarrow (a-b) \cdot b < 0$;

12) $|a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a \cdot b < 0$.

Згідно з (наведеними вище) властивостями модуля, мають місце наступні схеми розв'язання найбільш типових рівнянь з модулем:

01. $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0.$

02. $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0.$

03. $|f(x)| + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

04. $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

05. $|f(x)| + |g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0. \end{cases}$

06. $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geqslant 0.$

07. $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)| \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leqslant 0.$

08. $f(|x|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$

09. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$

10. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x).$

11. $|x-a| + |x-b| = |a-b| \Leftrightarrow b \leqslant x \leqslant a \ \ (\forall a \geqslant b)$.

12. Розглянемо рівняння виду:

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| = g(x),$$

де $f_i(x),\ i=\overline{1,\ n},\ g(x),$ — деякі функції.

Розв'язання таких рівнянь шляхом послідовного розкриття знаків модулів є дуже громіздким. Зазначені рівняння доцільно розв'язувати саме **методом інтервалів**. Для цього знаходять всі точки, в яких хоча б одна із функцій $f_i(x),\ i=\overline{1,\ n}$ змінює знак. Ці точки ділять область допустимих значень рівняння на проміжки, на кожному з яких всі функції $f_i(x),\ i=\overline{1,\ n}$ зберігають знак. Використовуючи означення модуля, переходять від рівняння до сукупності систем, які не містять знаків модулів.

Аналогічно можна розв'язувати і відповідні нерівності:

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|+\dots+|f_n(x)|\geqslant g(x).$$

Нерівності з модулем

01. $|f(x)|>f(x)\Leftrightarrow f(x)<0.$

02. $|f(x)|\geqslant f(x)\Leftrightarrow x\in D(f).$

03. $|f(x)|\leqslant f(x)\Leftrightarrow f(x)\geqslant 0.$

04. $|f(x)|<f(x)\Rightarrow x\in\emptyset.$

05. $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>-g(x).\end{cases}$

06. $|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\leqslant g(x),\\ f(x)\geqslant -g(x).\end{cases}$

07. $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)>g(x),\\ f(x)<-g(x).\end{array}\right.$

08. $|f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)\geqslant g(x),\\ f(x)\leqslant -g(x).\end{array}\right.$

09. $|f(x)|\leqslant |g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\leqslant g^2(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)-g(x)\leqslant 0,\\ f(x)+g(x)\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)-g(x)\geqslant 0,\\ f(x)+g(x)\leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$

10. $|f(x)+g(x)|<|f(x)|+|g(x)|\Leftrightarrow f(x)g(x)<0.$

11. $|f(x)-g(x)|>|f(x)|-|g(x)|\Leftrightarrow (f(x)-g(x))\,g(x)<0.$

Ірраціональні рівняння

Розв'язання ірраціональних рівнянь полягає у зведені їх до відповідних раціональних рівнянь, які рівносильні вихідним або є їх наслідком. Таке зведення до раціональних рівнянь проводиться в основному піднесенням обох частин до степеня з відповідним показником. При цьому спираються на наступні твердження (всюди нижче — $n \in N$, $c = \text{const}$, $c > 0$):

01. $f(x) = g(x) \Rightarrow f^{2n}(x) = g^{2n}(x)$;

02. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x)$;

03. $f^{2n}(x) = g^{2n}(x) \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)|$;

04. $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$;

05. $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2n}(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$

06. $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases}$

07. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases}$

08. $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$

09. $\sqrt[2n]{f(x)} + \sqrt[2n]{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

10. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = c \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = c^2 - f(x) - g(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = c^2 - f(x) - g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = c^2 - f(x) - g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

11. $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = c \Leftrightarrow f(x) = \left(c + \sqrt{g(x)}\right)^2.$

12. $$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)-f(x)-g(x), \\ f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0, \\ h(x)\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x)\cdot g(x)}=h(x)-f(x)-g(x), \\ f(x)\geqslant 0, \\ h(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

12′. $$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \sqrt{g(x)}+\sqrt{h(x)}=\sqrt{f(x)}.$$

Ірраціональні нерівності

01. $$\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow f(x)<(g(x))^{2n+1}.$$

02. $$\sqrt[2n+1]{f(x)}\leqslant g(x) \Leftrightarrow f(x)\leqslant (g(x))^{2n+1}.$$

03. $$\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow f(x)>(g(x))^{2n+1}.$$

04. $$\sqrt[2n+1]{f(x)}\geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x)\geqslant (g(x))^{2n+1}.$$

05. $$\sqrt[2n+1]{f(x)}>\sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x).$$

06. $$\sqrt[2n+1]{f(x)}\geqslant\sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x).$$

07. $$\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

08. $$\sqrt[2n]{f(x)}\geqslant\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant g(x), \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

09. $$\sqrt[2n]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<(g(x))^{2n}. \end{cases}$$

10. $$\sqrt[2n]{f(x)}\leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)\leqslant(g(x))^{2n}. \end{cases}$$

11. $$\sqrt[2n]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)>(g(x))^{2n} \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

12. $\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant (g(x))^{2n} \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

13. $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g). \end{cases} \end{array}\right.$

14. $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g). \end{cases} \end{array}\right.$

15. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

16. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

17. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

18. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

19. $\sqrt[2n]{f(x)} + \sqrt[2n]{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

20. $\sqrt[2n]{f(x)} + \sqrt[2n]{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

21. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < c \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} < c^2 - f(x) - g(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

22. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > c \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} > c^2 - f(x) - g(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} > c^2 - f(x) - g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{f(x)\cdot g(x)} > c^2 - f(x) - g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

23. $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} > c \Leftrightarrow f(x) > \left(c + \sqrt{g(x)}\right)^2.$

24. $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \left(c + \sqrt{g(x)}\right)^2, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Рівносильні перетворення алгебраїчних систем

Сформулюємо ряд тверджень про рівносильні системи:

1. $\begin{cases} F(x;y) = \Phi(x;y), \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x;f(x)) = \Phi(x;(f(x)), \\ y = f(x); \end{cases}$

2. $\begin{cases} F_1(x;y) = \Phi_1(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x;y) + F_2(x;y) = \Phi_1(x;y) + \Phi_2(x;y), \\ F_1(x;y) = \Phi_1(x;y); \end{cases}$

3. $\begin{cases} F_1(x;y) = \Phi_1(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x;y) + F_2(x;y) = \Phi_1(x;y) + \Phi_2(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y); \end{cases}$

4. $\begin{cases} F_1(x;y) = \Phi_1(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x;y) - F_2(x;y) = \Phi_1(x;y) - \Phi_2(x;y), \\ F_1(x;y) = \Phi_1(x;y); \end{cases}$

5. $\begin{cases} F_1(x;y) = \Phi_1(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x;y) - F_2(x;y) = \Phi_1(x;y) - \Phi_2(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y); \end{cases}$

6. $\begin{cases} F_1(x;y) = \Phi_1(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x;y) + F_2(x;y) = \Phi_1(x;y) + \Phi_2(x;y), \\ F_1(x;y) - F_2(x;y) = \Phi_1(x;y) - \Phi_2(x;y). \end{cases}$

7. Якщо до множини розв'язків рівняння $F_2(x;y) = \Phi_2(x;y)$ не входять такі пари $(x;y)$, при яких $F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) = 0$, то:

$$\begin{cases} F_1(x;y) = \Phi_1(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x;y)\cdot F_2(x;y) = \Phi_1(x;y)\cdot \Phi_2(x;y), \\ F_1(x;y) = \Phi_1(x;y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x;y) = \Phi_1(x;y), \\ F_2(x;y) = \Phi_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{F_1(x;y)}{F_2(x;y)} = \dfrac{\Phi_1(x;y)}{\Phi_2(x;y)}, \\ F_1(x;y) = \Phi_1(x;y). \end{cases}$$

Зауваження. При розв'язанні систем з трьома невідомими часто використовують рівності:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz),$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 + 3xyz - 3(x+y+z)(xy + yz + xz).$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

[1] Апостолова Г.В. Перші зустрічі з параметрами / Апостолова Г.В. – К.: Факт, 2004. – 328 с.

[2] Апостолова Г.В. Хитромудрий модуль / Апостолова Г.В. – К.: Факт, 2006. – 256 с.

[3] Апостолова Г.В. Антьє і мантиса числа / Апостолова Г.В. Ясінський В.В. – К.: Факт, 2006. – 128 с.

[4] Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс / Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П. – М.: МГИЭТ (ТУ), 2003. – 224 с.

[5] Березина Л. Ю. Графы и их применение : [пособие для учителей] / Березина Л. Ю. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.

[6] Бродский Я.С. Функциональные уравнения / Бродский Я.С, Слипенко А.К. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 96 с.

[7] Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика : [пособие для учителей] / Виленкин Н. Я. – М.: Просвещение, 1976. – 48 с.

[8] Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами : [учебное пособие для учащихся 7-11 кл.] / Галкин Е. В. – Челябинск: Взгляд, 2005. – 271 с.

[9] Германович П.Ю. Сборник задач по математике на сообразительность : [пособие для учителей] / Германович П.Ю. – М.: Учпедгиз, 1960. – 224с.

[10] Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / Голубев В.И. – М: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.

[11] Головина Л. И. Индукция в геометрии / Головина Л. И., Яглом И. М. – М., Физматгиз, 1961. – 101 с.

[12] Гончарова І. В. Евристики в геометрії [факультативний курс: книга для вчителя] / Гончарова І. В., Скафа О.І. – Х.: Основа, 2004. – 112 с.

[13] Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. – К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992. – 290 с.

[14] Дзигіна Л. Б. Програма підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах / Дзигіна Л. Б. – Основа, 2009. – 89 с. (Математика в школах України: Науково-методичний журнал, № 16/18.)

[15] Екимова М. А. Задачи на разрезание / Екимова М. А., Кукин Г. П. – М.: МЦНМО, 2002. – 122 с.

[16] Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Как решают нестандартные задачи / Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.; под редакцией В. О. Бугаенко. – [4-е Изд.] – испр. М.: МЦНМО, 2008. – 96с.

[17] Козко А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / Козко А. И., Чирский В. Г. – М.: МЦНМО, 2007. – 296с.

[18] Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание / Линдгрен Г.; [пер. с англ. Ю. Н. Сударева.]; под ред. и с послесл.И, М. Яглома. – М.: Мир, 1977. – 256 с.

[19] Летчиков А. В. Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями / Летчиков А. В. – Издательство: Удмуртского университета, 1992. – 108 с.

[20] Ліпчевський Л. В. Розв'язування нерівностей. Нестандартні способи доведення нерівностей / Ліпчевський Л. В., Остапчук У. В. – Біла Церква : КОІПОПК, 2004. – 76 с. – (Навчально – методичний посібник.)

[21] Мельников О. И. Занимательные задачи по теории графов / Мельников О. И. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – 144 с.

[22] Алгебра : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х.: Гімназія, 2008. – 368 с.

[23] Мерзляк А. Г. Геометрія : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х.: Гімназія, 2008. – 240 с.

[24] Петраков И. С. Математические олимпиады школьников : [пособие для учителей] / Петраков И. С. – М.: Просвещение, 1982. – 96 с.

[25] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии, в 2 ч. / Прасолов В. В. – М.: Наука, 1991.

[26] Задачі з параметрами / Репета В. К., Клешня Н. О., Коробова М. В., Репета Л. А. – К.: Вища школа, 2006. – 302 с.

[27] Седракян Н. М. Неравенства. Методы доказательства / Седракян Н. М., Авоян А. М.; [пер. с арм. Г. В. Григоряна] – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

[28] Шаповалов А. В. Принцип узких мест / Шаповалов А. В. – М.: МЦНМО, 2006. – 24 с.

[29] Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики / Шень А. – М.: МЦНМО, 2007. – 40 с.

[30] Шень А. Математическая индукция / Шень А. – [3-е изд., дополн.] – М.: МЦНМО, 2007. – 32 с.

[31] Ясінський В. Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач / Ясінський В. – Математика в школі: Науково-методичний журнал № 1/2, 2009. – 40,[35] с.

[32] Ясінський В. Принцип Штурма та його використання під час розв'язування олімпіадних екстремальних задач / Ясінський В., Наконечна Л. – Математика в школі: Науково-методичний журнал № 9, 2009. – 40,[33]с.

[33] Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції / Ясінський В. А. – Х.: Основа, 2005. – 69 с.

Математичні олімпіади і турніри в Україні

[34] Сборник задач киевских математических олимпиад / Вышенский В. А., Карташев Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И. – К.: 1984. – 240 с.

[35] Вишенський В. А. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / Вишенський В. А., Карташов М. В. – К.: Либідь, 1993. – 144с.

[36] Вишенський В. А. Українські математичні олімпіади : [довідник] / Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.

[37] Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / Лейфура В. М., Мітельман І. М. – К.: Техніка, 2003. – 541 с.

[38] Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ] / Федак І.В. – Чернівці, 2003.

[39] Басанько А. М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / Басанько А. М., Романенко А. О. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.

[40] Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Коваль Т. В. – Тернопіль: Мандрівець, 2004. – 80 с.

[41] Лейфура В. М. Змагання юних математиків України. 2003 рік / Лейфура В. М. – Х.: Основа, 2004.

[42] Ясінський В. А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник] / Ясінський В. А. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.

[43] Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Довбыш Р. И., Потемкина Л. Л., Трегуб Н. Л. и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336 с.

[44] Лось В. М. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач : [навч. посібник] / Лось В. М., Тихієнко В. П. – К.: Кондор, 2005 – 312 с.

[45] Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] / Сарана О. А. – К.: А.С.К., 2005. – 344 с.

[46] Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання / Ясінський В. А. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.

[47] Ясінський В. А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад : [методический материал] / Ясінський В. А. – Х.: Основа, 2006. – 128 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»)

[48] Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А. Б. Веліховська, О. В. Гримайло. – Х.: Основа, 2007. – 160 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 2 (50)).

[49] Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1] / Вороний О. М. – Х.: Основа, 2008. – 128 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 5 (65)).

[50] Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2] / Вороний О. М. – Х.: Основа, 2008. – 141, [3] с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип.

6 (66)).

[51] Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006-2007. / Анікушин А. В., Арман А. Р. – К.: Літера, 2008 – 135 с.

[52] Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006-2007. / Анікушин А. В., Арман А. Р. – К.: Літера, 2008 – 224 с.

[53] Анікушин А. В. Всеукраїнські математичні бої – 2009. / Анікушин А. В., Арман А. Р. ; за ред. Рубльова Б. В. – Дніпропетровськ: Інновація, 2010 – 96 с.

[54] Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України 2007-2008 та 2008 – 2009. / Анікушин А. В., Арман А. Р. ; за ред. Рубльова Б. В. – Львів: Каменяр, 2010 – 552 с.

Математичні олімпіади і турніри в Росії

[55] Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы. – М.: МЦНМО, 2007. – 468 с.

[56] Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М.: Просвещение, 2008. – 192 с.

[57] Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, 2010. – 239с.

[58] Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; [под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М.: Просвещение, 2009. – 159 с.

[59] Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы / Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. – М.: Просвещение, 2010. – 192 с.

[60] Агаханов Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М.: Просвещение, 2010. – 127 с.

[61] Балаян Э. Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. – 3-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 364 с.

[62] Весенний Турнир Архимеда. Олимпиада для 5-6 классов. Задания с решениями, технология проведения/[Баранова Т. А., Блинков А. Д., Кочетков К. П. и др.]. – М.: МЦНМО, 2003. – 128 с.

[63] Болтянский В. Г. Сборник задач московских математических олимпиад/В. Г. Болтянский , А. А. Леман. – М.: Просвещение, 1965. 384 с.

[64] Бончковский Р. Н. Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов/Р. Н.Бончковский . – ОНТИ НКТП СССР, 1936. 82 с.

[65] Вавилов В. В. Задачи отборочных математических олимпиад/В. В.Вавилов . – М.: МГУ, 1992. – 61 с.

[66] Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: учебное пособие для учащихся 7-11 кл/Е. В.Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2004. – 448 с.

[67] Гальперин Г. А. Московские математические олимпиады/Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго . – М.: Просвещение, 1986. – 303с.

[68] Генкин С. А. Ленинградские математические кружки/Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.

[69] Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике/Н. В.Горбачев.– М.: МЦНМО, 2005. – 560 с.

[70] Егоров А. А. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика/А. А. Егоров, Ж. М. Раббот . – М.: Бюро Квантум, 2006. – (Библиотечка «Квант»)

[71] Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): Пособие для учителей 5-8 классов. под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2-е, переработ/Г. И. Зубелевич. – М.: Просвещение, 1971. – 304 с.

[72] Математика в задачах: Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / [под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова]. – М.: МЦНМО, 2009. – 488 с.

[73] Московские математические регаты / [сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц]. – М.: МЦНМО, 2007. – 360 с.

[74] Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005-2008). – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. – 48 с.

[75] Московские математические олимпиады 1993-2005 г./[Федоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В.]. / [под ред. В. М. Тихомирова]. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.

[76] Севрюков П. Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / П. Ф. Севрюков. – Изд. 2-е. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 112 с.

[77] Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике/А. В.Спивак. – М.: Просвещение, 2002. – 208 с.

[78] Фомин А. А. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады/А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М.: Дрофа, 2006. – 159 с.

[79] Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады/Д. В.Фомин. – СПб.: Политехника, 1994. 309 с.

[80] Ященко И. В. Приглашение на математический праздник/И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2005. – 104 с.

[81] Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / [сост. В. А. Шеховцов]. – Волгоград: Учитель, 2009. – 99 с.

Математичні олімпіади за часів СРСР

[82] Агаханов Н. Х. Математические олимпиады школьников/ Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренок. – М.: Просвещение: Учеб. лит., 1997. – 208 с.

[83] Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад/ И. Л. Бабинская. – М.: Наука, 1975. – 112 с.

[84] Бугулов Е. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам/ Е. А. Бугулов, Б. А. Толасов. – Орджоникидзе, 1962. – 226 с.

[85] Васильев Н. Б. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков/ Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М.: Учпедгиз, 1963. – 53 с.

[86] Заочные математические олимпиады/ Н. Б. Васильев, В. Л. Гуттенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. – [2-е изд.]. – М.: Наука, 1987. – 176 с.

[87] Васильев Н. Б. Задачи всесоюзных математических олимпиад/ Н. Б.Васильев, А. А. Егоров. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

[88] Петраков И. С. Математические олимпиады школьников: пособие для учителей/ И. С.Петраков. – М.: Просвещение, 1982. – 96 с.

[89] Ю. М. Рябухин Кишиневские математические олимпиады/Ю. М. Рябухин, В. П. Солтан, Б. И. Чиник. – Кишинев: Штиинца, 1983. – 76 с.

[90] Савин А. П. Физико-математические олимпиады: сборник/ А. П. Савин. – М.: Знание, 1977. – 160с.

[91] Шустеф Ф. М. Сборник олимпиадных задач по математике. Под ред. Ф.М. Шустеф/ Ф. М. Шустеф, А. М. Фельдман, В. Ю. Гуревич.–Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, 1962. 84 с.

Міжнародні та закордонні математичні олімпіади

[92] Берник В. И. Сборник олимпиадных задач по математике/ В. И. Берник, И. К. Жук, О. В Мельников. – М.: Нар. асвета, 1980. – 144 с.

[93] Васильев Н. Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад/ Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

[94] Конягин С. В. Зарубежные математические олимпиады / под ред. И. Н Сергеева/ С. В.Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). – 416 с.

[95] Венгерские математические олимпиады.[пер. с венг, Ю. А. Данилова. под ред. и с предисл. В. М. Алексеева]/Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я..– М.: Мир, 1976. – 543 с.

[96] Лейфура В. М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування/ В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – Львів: Євро світ, 1999. – 128 с.

[97] Морозова Е. А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги: пособие для учащихся/ Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. – [4-е изд., испр. и доп]. – М.: Просвещение, 1976. – 288 с.

[98] Страшевич С. Польские математические олимпиады/Страшевич С., Бровкин Е.; предисл, А. Пелчинского и А. Шинцеля; пер. с польск. Ю. А. Данилова; под ред, В.М. Алексеева. – М.: Мир, 1978. – 338 с.

[99] Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / [сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова]. – М.: Дрофа, 1998. – 160 с.

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань, результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років) [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://matholymp.org.ua/

2. Фізико-математичний журнал «Квант» (завдання різних математичних олімпіад за 1971-2002рр) [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://kvant.mirror1.mccme.ru/

3. Сайт міжнародних олімпіад з математики [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://www.imo-official.org/

4. Олимпиады для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://olimpiada.ru/

5. Всероссийская олимпиада по математике [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: math.rusolymp.ru/

6. Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://mathkang.ru/

7. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://www.kangaroo.com.ua/index.php

8. Московская математическая олимпиада школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://olympiads.mccme.ru/mmo/

9. Санкт-Петербургские математические олимпиады [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://www.pdmi.ras.ru/ olymp/

10. Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://www.turgor.ru/

11. Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://www.mccme.ru/

12. Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань). [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн.: http://zaba.ru/, http://problems.ru/