

**ЛЬВІВСЬКИЙ РЕГІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР
ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ОСВІТИ**

МАТЕМАТИКА

**Збірник завдань
для підготовки до
зовнішнього незалежного оцінювання**

Львів 2007

У збірнику подано завдання, які протягом 2003 – 2007 років використовували в системі зовнішнього незалежного оцінювання в Україні. Вони пройшли процедуру апробації і були щороку рекомендовані Міністерством освіти і науки України.

МАТЕМАТИКА. Збірник завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – Львів: ЛРЦОЯО, 2007. – 51 с.

Збірник завдань укладено працівниками ЛРЦОЯО з дозволу Міжнародного фонду „Відродження” (лист від 25.07.2007р. №92) та Українського центру оцінювання якості освіти (лист від 14.02.2007р. № 01/01-105) для широкого інформування громадськості щодо форм та змісту тестових завдань, сприяння прозорості під час впровадження зовнішнього оцінювання на загальнодержавному рівні. Пропоновані завдання пройшли тестологічний аналіз і мають добрі характеристики щодо валідності та надійності – найважливіших критеріїв оцінювання якості завдань у тестовій формі. Це відрізняє збірник від інших, наявних на книжковому ринку.

Збірник стане в нагоді абітурієнтам, учням, учителям під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання 2008-го та наступних років.

Відтворювати чи копіювати збірник у цілому або його окремі частини можна лише з дозволу МФ „Відродження” та УЦОЯО.

© МФ „Відродження”

© УЦОЯО

Укладачі: А. І. Милянник, Я. І. Ліщинська – методисти ЛРЦОЯО

Комп'ютерна верстка: В. М. Білоніжко – провідний спеціаліст ЛРЦОЯО

Зміст

| | |
|--|----|
| Вступ | 4 |
| Розділ I. Числа і вирази | 8 |
| Розділ II. Рівняння і нерівності | 16 |
| Розділ III. Функції | 26 |
| Розділ IV. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики | 37 |
| Розділ V. Планіметрія | 39 |
| Розділ VI. Стереометрія | 46 |

Вступ

Львівський регіональний центр якості освіти пропонує Вашій увазі збірник завдань, які використовували в зовнішньому оцінюванні з математики протягом 2003–2007 років в Україні.

Впровадження зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) в Україні вже має свою коротку історію. Розпочиналося ЗНО як експеримент, який проводило Міністерство освіти і науки України за підтримки Міжнародного фонду «Відродження». Тоді результати тестування, за бажанням випускників, були зараховані як державна підсумкова атестація та як вступний іспит до вищих навчальних закладів, що погодилися визнавати ці результати. У 2003 році сертифікати з результатами незалежного тестування приймали чотири університети: Національний університет «Києво-Могилянська академія», Львівський національний університет імені Івана Франка, Одеський національний університет ім. Мечнікова та Харківський педагогічний університет ім. Г. Сковороди. Проводив тестування Центр тестових технологій (ЦТТ). У 2006 році був створений Український центр оцінювання якості освіти (УЦОЯО). Зовнішнє оцінювання набуло статусу загальнонаціонального освітнього експерименту і відбулося за державні кошти. Усі вищі навчальні заклади України приймали Сертифікати УЦОЯО і зараховували відображені у них результати як вступні випробування.

У 2008 році ЗНО буде обов'язковим для всіх, хто має намір вступати у вищі навчальні заклади України (Наказ МОН №607 від 13.07.2007).

З метою підготовки учнів до тестувань ЦТТ видавав Інформаційні матеріали, які містили зразки завдань і демонстраційний варіант тестового зошита. У 2006–2007 роках такі матеріали видавав УЦОЯО. Усі завдання з цих інформаційних матеріалів є в пропонованому збірнику. Тут також наведено усі завдання тестових зошитів з математики, які використовували у тестуваннях 2003–2007 років.

Структура збірника, форми завдань та особливі позначки

Збірник складається з шести розділів:

- I. Числа і вирази;
- II. Рівняння і нерівності;
- III. Функції;
- IV. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики;
- V. Планіметрія;
- VI. Стереометрія.

Розділи містять тестові завдання трьох форм:

1. Закриті завдання з однією правильною відповіддю. Наприклад:

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} \sqrt{x-2} \sqrt{x-5} = 0$.

| | | | | |
|---------|------|-------------|---------------------------|-----|
| А -1; 2 | Б -1 | В 1; -2; -5 | Г рівняння не має коренів | Д 5 |
|---------|------|-------------|---------------------------|-----|

Серед п'яти варіантів лише один правильний: Д. У таких завданнях оцінюють правильність (чи неправильність) вибору варіанта відповіді.

2. Відкриті завдання з короткою відповіддю. Наприклад:

Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на відрізку $[-1; 3]$.

Правильна відповідь: 66. У таких завданнях оцінюють правильність відповіді, яку зазвичай записують десятковим дробом.

3. Відкриті завдання з розгорнутою відповіддю. Наприклад:

Із середини висоти правильної трикутної піраміди опущено перпендикуляри на бічне ребро піраміди і на бічну грань. Довжини цих перпендикулярів відповідно дорівнюють $\sqrt{2}$ та 1.

1. Доведіть, що основа перпендикуляра, проведеного із середини висоти піраміди на бічну грань, лежить на апофемі.

2. Знайдіть об'єм піраміди.

У таких завданнях оцінюють не лише відповідь, а й логічний хід міркувань, який приводить до правильної відповіді, доцільне використання доведених математичних фактів (теорем, аксіом, властивостей), повноту розв'язання. Відкриті завдання з розгорнутою відповіддю оцінюють спеціально підготовлені екзаменатори за єдиними для всіх схемами. Ці схеми розробляють для конкретних завдань відповідно до загальних критеріїв.

Критерії оцінювання завдання з розгорнутою відповіддю (0–4 бали)

| Бали | Критерії |
|---------|---|
| 4 бали | Отримано правильну відповідь з обґрунтуванням усіх ключових моментів розв'язування |
| 3 бали | Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо. Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях, перетвореннях, які не впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною |
| 2 бали | Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів обґрунтовано недостатньо. Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях чи перетвореннях, які не впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною (правильно розв'язана лише частина завдання) |
| 1 бал | У правильній послідовності ходу розв'язування немає деяких етапів розв'язування. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або задача розв'язана неповністю |
| 0 балів | Учень не приступив до розв'язування задачі або приступив до її розв'язування, але його записи не відповідають наведеним вище критеріям оцінювання завдання в 1, 2, 3, 4 бали |

Тестові завдання інших форм на зовнішньому оцінюванні з математики не використовували.

Кількість завдань різних розділів, які використовували в тестовому зошиті ЗНО-2007 з математики, наведено в таблиці.

| Навчальний предмет | Розділи | Кількість завдань | | | |
|---------------------------|--|--|--------------------------------|-----------------------------------|----|
| | | Закриті з однією правильною відповіддю | Відкриті з короткою відповіддю | Відкриті з розгорнутою відповіддю | % |
| Алгебра і початки аналізу | Числа і вирази | 6 | 3 | 2 | 24 |
| | Рівняння і нерівності | 4 | 5 | | 27 |
| | Функції | 5 | 3 | | 24 |
| | Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики | 1 | 1 | – | 5 |
| Геометрія | Планіметрія | 2 | 1 | 1 | 9 |
| | Стереометрія | 2 | 2 | | 11 |

У ЗНО з математики цей розподіл завдань майже незмінний.

Деякі завдання у збірнику мають особливі позначки. Наприклад:

(Т-06, 21) Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий – 20.

Т-06 означає, що це завдання використовували в тестовому зошиті ЗНО 2006 року. Так позначено всі завдання тестових зошитів 2006 та 2007 років. Наступне число вказує на рівень складності завдання: а саме, який відсоток учасників розв'язали його правильно. З цим завданням справилися 21% учасників ЗНО 2006 року.

Якість завдань

Якість завдань залежить від багатьох чинників. Зокрема, від мети, яку ми ставимо перед тестом як інструментом вимірювання. Тест може мати добрі характеристики під час його використання для досягнення одних цілей і погані у разі використання для досягнення інших. Наприклад, терези є придатним інструментом для вимірювання ваги і нікудишнім для вимірювання відстаней чи часу.

Є два визнаних способи визначити якість тестових завдань. Перший – показати завдання підготовленому експертові, який зможе визначити їх придатність поставленим цілям. Другий – «бойове хрещення», тобто використання завдань у тестуваннях і подальший аналіз результатів. Усі завдання цього збірника пройшли відповідну експертизу, більшість із них використовували в тестуваннях. Саме в цьому унікальність збірника.

Говорячи про якість, часто оперують не багатьом зрозумілими психометричними та статистичними термінами та формулами. Фахівці знайомі з основами психометрики та математичної статистики можуть ознайомитися з аналізом тестів на сторінках сайтів УЦОЯО та ЦГТ (www.testportal.com та www.ukrtest.org), а також у звітах УЦОЯО, які публікувалися в журналі «ТІМО» та в інформаційному збірнику «Зовнішнє незалежне оцінювання навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів України, 2007 р.». І переконатися, що дані тести виконали покладені на них завдання, такі як: оцінити рівень навчальних досягнень учасників та ступінь їх підготовленості до подальшого навчання у ВНЗ.

Збірник буде корисний учням та учителям під час підготовки до ЗНО з математики 2008 року та наступних років.

Розділ І. Числа і вирази

Завдання І.1 – І.36 мають по п'ять варіантів відповідей, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом.

І.1 (Т-06, 46)* Обчисліть $\sqrt{125}\sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}}$.

| | | | | |
|----------------|---------------------------|-----|---------------|--------------------------------|
| А $11\sqrt{5}$ | Б $10\sqrt{2} - \sqrt{5}$ | В 9 | Г $9\sqrt{5}$ | Д $\sqrt[10]{4000} - \sqrt{5}$ |
|----------------|---------------------------|-----|---------------|--------------------------------|

І.2 Подайте у вигляді степеня вираз $\frac{7}{\sqrt[5]{\sqrt{7}}}$.

| | | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| А $7^{\frac{2}{5}}$ | Б $7^{\frac{1}{10}}$ | В $7^{\frac{1}{10}}$ | Г $7^{\frac{4}{5}}$ | Д $7^{\frac{9}{10}}$ |
|---------------------|----------------------|----------------------|---------------------|----------------------|

І.3 Знайдіть значення виразу $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}$, якщо $a = 5$.

| | | | | |
|-------------------|-------------------|----|----------------|-------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $5^{\frac{1}{2}}$ | $5^{\frac{2}{3}}$ | 25 | $\frac{1}{25}$ | $5^{\frac{8}{9}}$ |

І.4 Спростіть вираз $\sqrt{4(a-1)^2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}}$, якщо $a < 0$.

| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|------------|--------------|
| А $2 - 1,5a$ | Б $2,5a - 2$ | В $1,5a - 2$ | Г $4 - 5a$ | Д $2 - 2,5a$ |
|--------------|--------------|--------------|------------|--------------|

І.5 Якщо $y = \frac{1}{zx}$ (де $x \neq 0, z \neq 0$), то $x =$

| | | | | |
|------|---------------|---------------|-------------------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| yz | $\frac{y}{z}$ | $\frac{z}{y}$ | $y - \frac{1}{z}$ | $\frac{1}{yz}$ |

І.6 Знайдіть значення виразу $x^2 - 4x + 4$, якщо $x = 2 - \sqrt{5}$.

| | | | | |
|----|---|------------------|------------------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| -5 | 5 | $13 - 4\sqrt{5}$ | $13 + 4\sqrt{5}$ | інша відповідь |

І.7 (Т-06, 44)* Якщо $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, то $c =$

| | | | | |
|--------------------|--------------------|---------|-------------------------------|--------------------|
| А $\frac{ab}{a-b}$ | Б $\frac{ab}{b-a}$ | В $a-b$ | Г $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ | Д $\frac{a-b}{ab}$ |
|--------------------|--------------------|---------|-------------------------------|--------------------|

* - про особливі позначки див. ст 7

I.8 (Т-06, 56) Знайдіть вираз, тотожно рівний даному виразу $x^4 + x^3 - x - 1$.

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------------|--------------------|----------------|----------------|--------------------|
| $(x+1)^2(x^2+x+1)$ | $(x^2-x+1)(x-1)^2$ | $(x-1)^3(x+1)$ | $(x-1)(x+1)^3$ | $(x^2-1)(x^2+x+1)$ |

I.9 Обчисліть $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$.

| | | | | |
|-----|-----|---------------|-----|-----|
| А 0 | Б 2 | В $2\sqrt{5}$ | Г 4 | Д 6 |
|-----|-----|---------------|-----|-----|

I.10 Обчисліть значення виразу: $\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{16}$.

| | | | | |
|------|-----|-----|-----|-----|
| А -3 | Б 1 | В 2 | Г 3 | Д 4 |
|------|-----|-----|-----|-----|

I.11 Задані числа: $1,5; \frac{5}{4}; \frac{4}{3}$. Розташуйте їх у порядку зростання.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $1,5; \frac{5}{4}; \frac{4}{3}$ | $\frac{5}{4}; \frac{4}{3}; 1,5$ | $1,5; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}; 1,5; \frac{5}{4}$ | $\frac{5}{4}; 1,5; \frac{4}{3}$ |

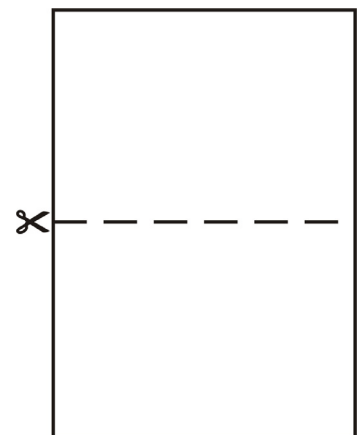
I.12 У класі дівчат удвічі більше ніж хлопців. З'ясуйте, якою із запропонованих може бути кількість учнів у такому класі?

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|----|----|----|
| 28 | 26 | 24 | 22 | 20 |

I.13 (Т-07, 60) Будівельна компанія закупила для нового будинку металопластикові вікна та двері у відношенні 4:1. Укажіть число, яким може виражатися загальна кількість вікон та дверей в цьому будинку.

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|----|----|----|
| 41 | 45 | 54 | 68 | 81 |

I.14 Видавнича фірма вирішила використовувати новий формат паперу. При цьому міркували так: по-перше, аркуш паперу нового формату повинен бути прямокутником 120 мм завдовжки; по-друге, якщо аркуш розрізати пополам, то отримані половинки повинні мати ті ж пропорції довжини й ширини, що й аркуш старого формату. Яке з наведених значень найбільш точно відповідає ширині аркуша нового формату?



| | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| А 60 мм | Б 84 мм | В 80 мм | Г 62 мм | Д 90 мм |
|---------|---------|---------|---------|---------|

I.15 (Т-06, 17) Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж саму суму грошей?

| | | | | |
|-------------------|-------------------|-------|-------|-------|
| А $\frac{1}{5}\%$ | Б $\frac{1}{4}\%$ | В 10% | Г 20% | Д 25% |
|-------------------|-------------------|-------|-------|-------|

I.16 У банку відкрили рахунок на 1000 грн під 20 % річних. Наприкінці кожного з перших двох років зберігання грошей у банку після нарахування відсотків вкладник додатково вносив ще a грн. На кінець третього року виявилось, що розмір вкладу збільшився порівняно з початковим вкладом на 300 %. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

| | |
|---|---|
| А | $((1000 \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 = 1000 \cdot 4$ |
| Б | $((1000 \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 = 1000 \cdot 4$ |
| В | $((1000 \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 = 1000 \cdot 3$ |
| Г | $((1000 \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 = 1000 \cdot 3$ |
| Д | $(1000 \cdot 1,2 + a) \cdot 2 = 1000 \cdot 3$ |

I.17 Як зміниться величина дробу, якщо чисельник збільшити на 100%, а знаменник зменшити на 50%?

| | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| зменшиться в 4 рази | зменшиться в 2 рази | збільшиться в 1,5 рази | збільшиться в 2 рази | збільшиться в 4 рази |

I.18 У домашній бібліотеці Марійки було 50 книжок. Згодом їх стало 150. На скільки відсотків зростає кількість книжок у бібліотеці Марійки?

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 100 % | 150 % | 200 % | 250 % | 300 % |

I.19 (Т-07, 69) Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Визначте, скільки грошей треба покласти на рахунок, щоб через рік отримати 60 грн. прибутку.

| | | | | |
|------|------|-----|-----|-----|
| А | Б | В | Г | Д |
| 1150 | 1050 | 950 | 850 | 750 |

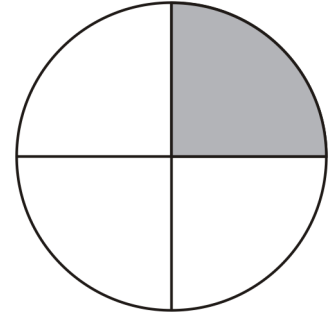
I.20 На скільки збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити на 50%?

| | | | | |
|--------|----------|--------|-------|----------|
| А 100% | Б 237,5% | В 150% | Г 50% | Д 337,5% |
|--------|----------|--------|-------|----------|

I.21 У результаті інфляції у державі N ціни зросли на 300 %. Знайдіть, на скільки відсотків потрібно знизити ціни, щоб повернути їх до попереднього рівня.

| | | | | |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|
| А на 300 % | Б на 200 % | В на 100 % | Г на 75 % | Д на 50 % |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|

I.22 На круговій діаграмі (заштрихована її частина) зображена та частина населення міста N, яка дивиться телевізійну передачу "Моя сім'я". Ця частина у процентах становить:



| | | | | |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| А $\frac{1}{4}$ % | Б 40% | В 25% | Г 45% | Д 90% |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|

I.23 Обчисліть $3 \operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

| | | | | |
|-----|-----------------|-----|------|------------------|
| А 4 | Б $\frac{4}{5}$ | В 3 | Г -4 | Д $-\frac{4}{5}$ |
|-----|-----------------|-----|------|------------------|

I.24 Знайдіть значення виразу $5 \cos^2 x - 1$, якщо $\sin^2 x = 0,4$.

| | | | | |
|---|------|----|---|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 2 | -0,2 | -2 | 1 | інша відповідь |

I.25 (Т-06, 37) Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

| | | | | |
|-----|-----------------|-----|------------------|------------------|
| А 1 | Б $\frac{1}{2}$ | В 0 | Г $-\frac{1}{2}$ | Д інша відповідь |
|-----|-----------------|-----|------------------|------------------|

I.26 Спростіть вираз $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$.

| | | | | |
|--|--|------------------------------------|-----|-----------------------------|
| А $\frac{1}{2} \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha$ | Б $\frac{1}{2} \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$ | В $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$ | Г 0 | Д $\frac{1}{2} \sin \alpha$ |
|--|--|------------------------------------|-----|-----------------------------|

I.27 (Т-07, 35) Обчисліть $\sqrt{(2 \sin 45^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2 \cos 45^\circ)^2}$.

| | | | | |
|---|----------------------|---------------|------------|---|
| А | Б | В | Г | Д |
| 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2}$ | 2 |

I.28 Задані числа: $a = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$, $c = \arccos \frac{1}{2}$.

Укажіть правильну числову нерівність.

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| А $a < b < c$ | Б $c < b < a$ | В $b < a < c$ | Г $b < c < a$ | Д $a < c < b$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|

I.29 Подайте у порядку зростання числа: $\sin 40^\circ$, $\sin 80^\circ$, $\sin 240^\circ$.

| | |
|---|--|
| А | $\sin 40^\circ, \sin 80^\circ, \sin 240^\circ$ |
| Б | $\sin 40^\circ, \sin 240^\circ, \sin 80^\circ$ |
| В | $\sin 240^\circ, \sin 80^\circ, \sin 40^\circ$ |
| Г | $\sin 240^\circ, \sin 40^\circ, \sin 80^\circ$ |
| Д | $\sin 80^\circ, \sin 240^\circ, \sin 40^\circ$ |

I.30 Обчисліть $\log_5 \sqrt{2} + \log_5 \frac{5}{\sqrt{2}}$.

| | | | | |
|---------------------------|-----|-----------------|------|-----|
| А $2 \log_5 \sqrt{2} + 1$ | Б 0 | В $\frac{1}{2}$ | Г -1 | Д 1 |
|---------------------------|-----|-----------------|------|-----|

I.31 Обчисліть $\log_4 \sqrt{2}$.

| | | | | |
|---------------|---------------|---|---|---|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |

I.32 Обчисліть числове значення виразу $\log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{1/3} 9$.

| | | | | |
|-----|-----|-----|------|-----|
| А 3 | Б 1 | В 2 | Г -3 | Д 4 |
|-----|-----|-----|------|-----|

I.33 (Т-07, 45) Розташуйте у порядку спадання числа $\sqrt{5}$; $2^{\log_2 5}$; $\frac{5}{2}$.

| | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $2^{\log_2 5}; \frac{5}{2}; \sqrt{5}$ | $\frac{5}{2}; \sqrt{5}; 2^{\log_2 5}$ | $\frac{5}{2}; 2^{\log_2 5}; \sqrt{5}$ | $\sqrt{5}; \frac{5}{2}; 2^{\log_2 5}$ | $2^{\log_2 5}; \sqrt{5}; \frac{5}{2}$ |

I.34 (Т-07, 48) Обчисліть $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$.

| | | | | |
|----------------|----------------|----|---------------|---------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | -2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

I.35 Якщо $\log_b a = c$ для будь-яких a, b і c , таких, що $a > 0, b > 0$ і $b \neq 1$, то справедлива рівність:

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a = c^b$ | $b = a^c$ | $a = b^c$ | $c = a^b$ | $c = b^a$ |

I.36 (Т-06, 54) Обчисліть значення виразу $\log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7}$.

| А 0 | Б 1 | В 2 | Г 4 | Д 25 |
|-----|-----|-----|-----|------|
|-----|-----|-----|-----|------|

В завданнях I.37 – I.68 правильна відповідь оцінюється 2 балами.

I.37 Обчисліть значення виразу $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$, якщо $a = -0,7; b = -10,7$.

I.38 Спростіть вираз $\left(\frac{1}{x^2} - x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2 + 1} - \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{x^2 - 1}\right)$.

I.39 Спростіть вираз $\left(\frac{a^{0,5} + 2}{a^{0,5} - 2} + \frac{a^{0,5} - 2}{a^{0,5} + 2} - \frac{16}{a - 4}\right)^4$

I.40 Знайдіть значення виразу $\frac{12\sqrt{(a+3)^2 - 12a}}{a-3}$, якщо $a = -0,123$.

I.41 Обчисліть $\sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} - 3}$.

I.42 Обчисліть значення виразу $\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}} + 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}{\sqrt{abc} + 2}$, якщо $a = 0,04; b > 0$ і $c > 0$.

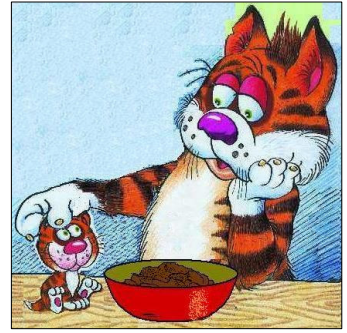
I.43 (Т-06, 9) Обчисліть значення виразу $\frac{53}{8 - \sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13} + 2}$.

I.44 Обчисліть $(\sqrt[5]{27} + \sqrt[4]{64})(\sqrt[5]{27} - \sqrt[4]{64})$ (Т-07, 40)

I.45 Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда, розміри дна якого $50 \text{ м} \times 20 \text{ м}$, а глибина – 3 м . Обчисліть час (у хв), за який басейн наповниться водою заввишки $2,8 \text{ м}$, якщо швидкість подачі води $7 \frac{\text{м}^3}{\text{хв}}$.

I.46 Ціну товару спочатку знизили на 20% , потім одержану ціну товару знизили ще на 10% . Знайдіть на скільки відсотків всього знизили ціну товару?

- I.47 Кішка з кошеням з'їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували одну, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошеняті?



- I.48 (Т-06, 21) Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий – 20.
- I.49 Сума третього і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайдіть суму перших одинадцяти членів цієї прогресії
- I.50 Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо відомі два її члени: $a_7 = 7$, $a_9 = -9$.
- I.51 (Т-07, 38) Знайдіть суму перших дванадцяти непарних натуральних чисел.
- I.52 Знайдіть суму перших 11 членів арифметичної прогресії, знаючи, що її шостий член дорівнює 4.
- I.53 Обчисліть значення виразу $20(\sin a - \cos a)$, якщо $\sin(2a) = 0,96$ і $a \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- I.54 Обчисліть значення виразу $5(\cos 430^\circ \sin 400^\circ - \sin 130^\circ \cos 740^\circ)$.
- I.55 Обчисліть значення виразу $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$, якщо $a + b = \frac{2\pi}{3}$, $a - b = \frac{\pi}{3}$.
- I.56 Обчисліть значення виразу $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.
- I.57 Обчисліть $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$ і $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.
- I.58 Обчисліть $4 \sin 15^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 75^\circ$.
- I.59 (Т-07, 39) Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.
- I.60 Спростіть вираз $(\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a) \sin 2a$.
- I.61 (Т-06, 5) Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$. Відповідь запишіть ДЕСЯТКОВИМ ДРОБОМ.
- I.62 Обчисліть: $\log_9 49 \cdot \log_7 5 \cdot \log_{25} 27$. Відповідь запишіть тільки десятковим дробом.

I.63 Обчисліть значення виразу $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7 \frac{58}{81}$.

I.64 Обчисліть значення виразу $\log_a^2 b + \log_a b^2 + 1$, якщо $\log_{ab} a = 0,2$.

I.65 (Т-07, 24) Обчисліть $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$

I.66 Обчисліть значення виразу $\frac{4}{5^{\log_{\sqrt{5}} 5}}$.

I.67 (Т-06, 13) Обчисліть $\frac{1}{25} \cdot 9^{\log_3 \sqrt{14} + 0,5}$. Відповідь запишіть ДЕСЯТКОВИМ ДРОБОМ.

I.68 Обчисліть $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

Розділ II. Рівняння і нерівності

Завдання II.1 – II.32 мають по п'ять варіантів відповідей, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом.

II.1 Розв'яжіть систему
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$$

| | | | | |
|----------|---------|-----------------------------------|----------|---------------------------------|
| А (1;-1) | Б (2;1) | В $(\frac{2}{17}; -\frac{7}{17})$ | Г (2;-1) | Д $(\frac{3}{7}; \frac{5}{28})$ |
|----------|---------|-----------------------------------|----------|---------------------------------|

II.2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} \sqrt{x-2} \sqrt{x-5} = 0$.

| | | | | |
|---------|------|-------------|---------------------------|-----|
| А -1; 2 | Б -1 | В 1; -2; -5 | Г рівняння не має коренів | Д 5 |
|---------|------|-------------|---------------------------|-----|

II.3 Знайдіть добуток коренів рівняння $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = 1$.

| | | | | |
|------|------|-----|-----|-----|
| А -3 | Б -1 | В 0 | Г 1 | Д 3 |
|------|------|-----|-----|-----|

II.4 (Т-07, 34) Розв'яжіть нерівність $x + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3} - 2$.

| | | | | |
|-----------|-----------------|------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $(-2; 3)$ | $(-2; +\infty)$ | $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ | $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ | $(-2; 3) \cup (3; +\infty)$ |

II.5 Вкажіть кількість коренів рівняння $\frac{|x|}{x} = x$.

| | | | | |
|--------|-------|-------|------------------|----------|
| А один | Б два | В три | Г не має коренів | Д безліч |
|--------|-------|-------|------------------|----------|

II.6 Скільки коренів має рівняння $x^2 - 9|x| = 0$?

| | | | | |
|--------------|-----|-----|------|---------|
| А | Б | В | Г | Д |
| Більше трьох | Три | Два | Один | Жодного |

II.7 (Т-07, 29) Укажіть, скільки дійсних коренів має рівняння $x^3 - 4|x| = 0$.

| | | | | |
|---------|------|-----|-----|--------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| жодного | один | два | три | більше трьох |

II.8 Корінь рівняння $(1,8 - 6x):9 = -\frac{19}{15}$ дорівнює:

| | | | | |
|------|-------|-----|-----|-----|
| А | Б | В | Г | Д |
| -2,2 | -1, 1 | 1,1 | 2,2 | 4,4 |

П.9 Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x^2} > 1$.

| | | | | |
|----------------|-----------|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $(-\infty; 1)$ | $(-1; 1)$ | $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ | $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ | $(-1; 0) \cup (0; 1)$ |

П.10 (Т-06, 46) Розв'яжіть нерівність $a^2 > a$.

| | | | | |
|------------------|------------|------------------|------------------------------------|------------------|
| А $(1; +\infty)$ | Б $(0; 1)$ | В $(-\infty; 0)$ | Г $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ | Д $(-\infty; 1)$ |
|------------------|------------|------------------|------------------------------------|------------------|

П.11 Розв'яжіть нерівність $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$.

| | | | | |
|-------------|-------------------|-------------------------------------|-------------|--------------------------------|
| А $(-3; 1]$ | Б $(-\infty; -3)$ | В $(-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$ | Г $[-3; 1]$ | Д $(-\infty; -3) \cup (-3; 1)$ |
|-------------|-------------------|-------------------------------------|-------------|--------------------------------|

П.12 Розв'яжіть нерівність $(1-x)(2+x) < 0$.

| | | | | |
|------------------------|-------------|-------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| А $(-\infty; +\infty)$ | Б $(-2; 1)$ | В $(-1; 2)$ | Г $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ | Д $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ |
|------------------------|-------------|-------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

П.13 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2, \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3. \end{cases}$ Знайдіть суму $x + y$ для одержаного розв'язку системи.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| А 2 | Б 3 | В 4 | Г 5 | Д 6 |
|-----|-----|-----|-----|-----|

П.14 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 10, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$ Вкажіть значення суми $y + x$ для знайденого розв'язку системи.

| | | | | |
|-----|-----|-----|------|-----|
| А 2 | Б 0 | В 1 | Г -1 | Д 3 |
|-----|-----|-----|------|-----|

П.15 Знайдіть розв'язок системи $\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 4y + 2x = -1. \end{cases}$

| | | | | |
|---------------------------------|------------|---|-----------------------------------|--|
| А $\left(1; \frac{1}{4}\right)$ | Б $(2; 1)$ | В $\left(\frac{1}{5}; -\frac{7}{20}\right)$ | Г $\left(-1; -\frac{5}{4}\right)$ | Д $\left(\frac{1}{5}; -\frac{13}{20}\right)$ |
|---------------------------------|------------|---|-----------------------------------|--|

II.16 Розв'яжіть рівняння $\cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

| | | | | |
|---|------------------------------------|--|-----------------------------|------------------------------|
| А $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Б $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | В $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Г $\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Д $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
|---|------------------------------------|--|-----------------------------|------------------------------|

II.17 (Т-07, 36) Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

| | | | | |
|-------------------|---|--|---|------------------|
| А $\frac{\pi}{6}$ | Б $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | В $\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Г $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Д інша відповідь |
|-------------------|---|--|---|------------------|

II.18 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2$.

| | | | | |
|-----|---------------------------------|----------------------------|--|---------------------------|
| А 2 | Б $2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | В $\operatorname{arctg} 2$ | Г $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Д рівняння не має коренів |
|-----|---------------------------------|----------------------------|--|---------------------------|

II.19 Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$.

| | | | | |
|--|--|---|--|------------------|
| А $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Б $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | В $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Г $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Д інша відповідь |
|--|--|---|--|------------------|

II.20 (Т-06, 42) Розв'яжіть рівняння $\sin(3x) = \frac{1}{2}$.

| | | | | |
|--|---|---|--|---|
| А $(-1)^k \frac{p}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ | Б $\pm \frac{p}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ | В $(-1)^k \frac{p}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ | Г $\pm \frac{p}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ | Д $(-1)^k \frac{p k}{18} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
|--|---|---|--|---|

II.21 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}(3x) = 6$.

| | | | | |
|--|--|--|---------------------------------|---|
| А $\operatorname{arccotg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | Б $\frac{1}{3} \operatorname{arccotg} 6 + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ | В $\frac{1}{3} \operatorname{arccotg} 6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | Г $2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | Д $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
|--|--|--|---------------------------------|---|

II.22 Розв'яжіть рівняння $2 \cos x \sin x = \sqrt{2}$.

| | | | | |
|--|--|---|--|------------------|
| А $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ | Б $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | В $\pm \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | Г $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ | Д не має коренів |
|--|--|---|--|------------------|

П.23 Розв'яжіть рівняння $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------------------|---|--|----------------------------------|----------------------------|
| $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ | $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ | $(-1)^k \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ | $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ | $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$ |

П.24 (Т-07, 45) Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{2}{5}$ |

П.25 Якщо $3^x = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$, то $x =$

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---|
| $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 3 |

П.26 Розв'яжіть нерівність: $0,25^{\frac{x^2+1}{2}} < \frac{1}{2}$.

| А $(-\infty; +\infty)$ | Б $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ | В $(-\infty; 0)$ | Г $(0; +\infty)$ | Д не має розв'язків |
|------------------------|------------------------------------|------------------|------------------|---------------------|
|------------------------|------------------------------------|------------------|------------------|---------------------|

П.27 Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{32}$.

| А $(-\infty; 2]$ | Б $(0; 2)$ | В $[2; +\infty)$ | Г $(-\infty; -2]$ | Д $(0; +\infty)$ |
|------------------|------------|------------------|-------------------|------------------|
|------------------|------------|------------------|-------------------|------------------|

П.28 Розв'яжіть нерівність $0,7^{3x-1} > 0,49$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|-------------------------------------|----------------|-------------------------------------|----------------|
| $(-\infty; 1)$ | $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ | $(1; +\infty)$ | $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ | Інша відповідь |

П.29 Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} 5$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------|-------------------------------|----------------|----------------|-------------------------------------|
| $(0; 5)$ | $\left(\frac{1}{5}; 5\right)$ | $(-\infty; 5)$ | $(5; +\infty)$ | $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ |

П.30 (Т-06, 17) Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{4}} 3 \cdot \log_4 x > 0$.

| А $(1; +\infty)$ | Б $(0; 4)$ | В $(0; 1)$ | Г $(4; +\infty)$ | Д $(-\infty; 1)$ |
|------------------|------------|------------|------------------|------------------|
|------------------|------------|------------|------------------|------------------|

П.31 (Т-07, 16) Розв'яжіть нерівність $\log_{0,1} 10 < \log_{0,1} x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------|-----------|-------------|------------|-----------------|
| $(10; +\infty)$ | $(0; 10)$ | $(0,1; 10)$ | $(-10; 0)$ | $(-\infty; 10)$ |

П.32 (Т-06, 41) Задано рівняння:

$$\log_2 x - \log_2(x-2) = 1, \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \sqrt{3}, \quad (2)$$

$$|x+2| = -3, \quad (3)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi. \quad (4)$$

Укажіть рівняння, яке НЕ МАЄ коренів на множині дійсних чисел.

| | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| А (1) і (4) | Б (2) і (3) | В (1) і (2) | Г (3) і (4) | Д інша відповідь |
|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|

В завданнях П.33 – П.86 правильна відповідь оцінюється 2 балами.

П.33 (Т-06, 26) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$.

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповідь їх добуток.

П.34 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$.

Якщо рівняння має один корінь, упишіть його у відповідь; якщо два корені – упишіть їх суму.

П.35 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{8x^2 - 7} = 3x - 4$.

Якщо рівняння має один корінь, упишіть його після слова "Відповідь", якщо декілька коренів, упишіть їх суму.

П.36 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$.

Якщо рівняння має декілька коренів, то у відповідь запишіть їх суму. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть у відповідь цей корінь.

П.37 Обчисліть суму коренів рівняння $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x^2 - 8x - 9} = 0$.

П.38 Знайдіть всі корені рівняння, які є цілими числами $\sqrt[7]{\frac{5-x}{3+x}} + 3\sqrt[7]{\frac{3+x}{5-x}} = 4$.

П.39 (Т-07, 43) Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 9)\sqrt{-15 + 8x - x^2} = 0$. У відповідь запишіть суму коренів.

П.40 Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{5x^2 - 20x + 36} + \sqrt{3x^2 - 12x + 37} = -2x^2 + 8x + 1$.

П.41 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{x^2 + 7} = 15 - x^2$ та запишіть у відповіді найменший корінь.

П.42 Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{2x+5} = \frac{\sqrt{2-x^2-x}}{x+2}$

П.43 Розв'яжіть задачу Герона Олександрійського (1 ст. до н.е.). "Із землі б'ють чотири джерела. Перше заповнює басейн за 1 день, друге – за 2 дні, третє – за 3 дні, а четверте – за 4 дні. Скільки часу потрібно для заповнення басейну чотирма джерелами, якщо вони будуть наповнювати його одночасно?"

Відповідь подайте десятковим дробом, у днях



П.44 Відстань між двома містами дорівнює 40 км. Турист, пройшов цю відстань зі швидкістю на $2 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ більшою за заплановану і тому прибув до місця призначення на 1 год раніше від запланованого часу. З якою швидкістю рухався турист?

П.45 (Т-07, 23) На перегоні, довжина якого дорівнює 240 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж мала бути за розкладом, і запізнився на 48 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

П.46 Швидкість товарного потяга 60 км/год. Якою є його довжина (у м), якщо відомо, що він проходить повз нерухомого спостерігача за 15 секунд?

П.47 (Т-06, 14) (Задача Л.Пізанського, XII-XIII ст.) Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовані на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

П.48 Від міста А до міста В вниз за течією річки відпливає моторний човен. Одночасно з ним повз місто А пропливає пліт. Досягнувши міста В, човен розвертається і пливе назад. Визначіть, у скільки разів власна швидкість човна більша за швидкість течії, якщо човен зустрів пліт посередині між містами А та В.

П.49 Пані Уляна поклала в банк певну суму грошей в умовних одиницях на два різні рахунки: один – з річним прибутком 6%, другий – 5%. Річний прибуток за двома вкладками становив 51 ум.од. Якщо внесені на різні рахунки кошти поміняти місцями, то річний прибуток становитиме 48 ум.од. Яку суму грошей внесла на рахунок у банк пані Уляна?

П.50 Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $(x+12)(x-9)^2(x-5)^3 \leq 0$.

П.51 Вкажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $(x-2)\lfloor(x+4)^2\rfloor(x^2-5x+12) \geq 0$.

П.52 (Т-06, 25) Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{|x + 2|} < 0.$$

П.53 Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 10x} \leq 0$. У відповідь запишіть найбільше число, яке задовольняє задану нерівність.

П.54 Укажіть найбільше ціле число, яке є розв'язком нерівності

$$\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} \geq \frac{2x - 1}{x^3 + 1}.$$

П.55 Укажіть число цілих розв'язків нерівності $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)^2(x-7)} > 0$

П.56 Укажіть найбільше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 9x + 14} \leq 0$.

П.57 (Т-07, 17) Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності

$$\frac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0$$

П.58 Знайдіть значення параметра a , при якому система $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ x \cdot y = 0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок. Якщо таких значень параметра a кілька, то запишіть їх добуток.

П.59 (Т-06, 13) Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення параметра a , при якому система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ (x-7)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок.}$$

П.60 Знайдіть найбільше значення параметра a , при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ |x| + y = a \end{cases}$ має розв'язком точно 2 пари чисел $(x_0; y_0)$.

П.61 (Т-07, 35) Знайдіть найбільше ціле значення параметра a , при якому система

$$\text{рівнянь } \begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ має два розв'язки.}$$

П.62 Використовуючи графік функції $f(x) = x^3 - 27x$ знайдіть найменше ціле значення параметра a , при якому рівняння $x^3 - 27x = a$ має три різні корені.

П.63 Вкажіть кількість коренів рівняння $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5\cos(\pi - x) + 2 = 0$, які задовольняють нерівність $0 < x < \pi$.

П.64 Вкажіть кількість коренів рівняння $2 \cos^2 x - 5 \cos(\pi - x) + 2 = 0$, які задовольняють нерівність $0 < x < 3\pi$.

П.65 Знайдіть найменший натуральний розв'язок нерівності $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

П.66 (Т-06, 3) Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1 + (y-1)^8, \\ 4 \sin \frac{\pi y}{2} = 4x^2 + 4x + 5. \end{cases}$$

Запишіть у відповідь ДОБУТОК $x_0 y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь.

П.67 Знайдіть усі цілі числа k , при яких рівняння $\cos kx = 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ має розв'язки.

П.68 Розв'яжіть рівняння $2^{x+2} - 2^x = 96$.

П.69 Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{8}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$.

П.70 Розв'яжіть нерівність $5^{x+2} < 0,2$.

Укажіть найбільше ціле число, яке є розв'язком нерівності.

П.71 Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + \cos x = 3y + \cos y, \\ 3x - y = 6. \end{cases}$$
 Запишіть у відповідь ДОБУТОК $x_0 y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь.

П.72 Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 3^{y+1} = 11, \\ 3x + 2 \cdot 3^y = 9 \end{cases}$$
 та знайдіть суму $x_0 + y_0$ для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь.

П.73 (Т-06, 26) Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$
 Запишіть у відповідь СУМУ $x_0 + y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь.

П.74 Знайдіть добуток $x y$, якщо пара $(x; y)$ є розв'язком системи рівнянь
$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{3}} - 2^{\frac{y}{3}} = 2, \\ 2^x - 2^y = 56. \end{cases}$$

П.75 Знайдіть суму $x + y$, якщо пара $(x; y)$ є розв'язком системи рівнянь
$$\begin{cases} 2^{2x+1} + 2^y = 40, \\ 2^{x+1} + 2^{y-1} = 12. \end{cases}$$

П.76 Знайдіть суму $x + y$, якщо пара $(x; y)$; є розв'язком системи рівнянь
$$\begin{cases} 3^2 - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7. \end{cases}$$

П.77 Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} y - 3 = |x - 2|, \\ y = 2^{x+1}. \end{cases}$$
 Знайдіть суму $x_0 + y_0$ для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь.

П.78 Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 4^{2x-y} = 256, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 30. \end{cases}$$
 Знайдіть найменшу суму $x_0 + y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь.

П.79 Визначте кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{90}(x-10) + \log_{90}(x-11) \leq 1$.

П.80 Розв'яжіть рівняння $\lg \log_2 \log_3 x = 0$

П.81 Розв'яжіть рівняння $\log_2(x-4) = 3$.

П.82 Знайдіть суму коренів рівняння $\log_3(x^2 - 3x)^2 - \log_3(1 - 2x)^2 = \log_3 4$.

П.83 (Т-07, 12) Знайдіть найменше ціле значення параметра a , при якому рівняння $\log_8(x+2) = \log_8(2x-a)$ має корені.

П.84 (Т-07, 31) Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2^{2y-x} = 32, \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = -2. \end{cases}$$
 Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком вказаної системи рівнянь.

П.85 Знайдіть суму $x + y$, якщо пара $(x; y)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 5^{\log_6(x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases}$$

П.86 Знайдіть суму $x_0 + y_0$ для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь

$$\begin{cases} 2^{x+3} = (0,5)^{2y+1}, \\ 5^{y-4} = (\sqrt{5})^{x+1}. \end{cases}$$

Розв'язання завдань П.87 – П.94 повинне мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями.

П.87 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{\log_x \frac{x^3}{3}} \geq \log_x \frac{x}{3}$.

П.88 Задано нерівність $\log_{x^2+y^2}(x-y) > 1$.

- а) Побудуйте у прямокутній декартовій системі координат множину допустимих значень змінних x та y .
- б) Побудуйте у прямокутній декартовій системі координат множину точок $(x; y)$, координати яких задовольняють задану нерівність та знайдіть площу цієї фігури.

П.89 Знайдіть всі значення параметра a , при яких всі розв'язки нерівності $ax^2 - x + 1 - a < 0$ задовольняють нерівність $0 < x < 1$.

П.90 Задано рівняння $\sin x + \cos x = \frac{a}{\sin x}$.

- а) Розв'яжіть рівняння при $a = 0$.
- б) Розв'яжіть рівняння при всіх значеннях параметра a .

П.91 Задано рівняння $x + 2a\sqrt{x+1} - a + 3 = 0$

- а) Розв'яжіть рівняння при $a = 2$
- б) Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння має розв'язки.
- в) Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння має єдиний розв'язок.

П.92 Знайдіть всі значення параметра a , при яких нерівність $a \cdot 9^x + 4 \cdot (a-1) \cdot 3^x + a > 1$ виконується при всіх дійсних значеннях x .

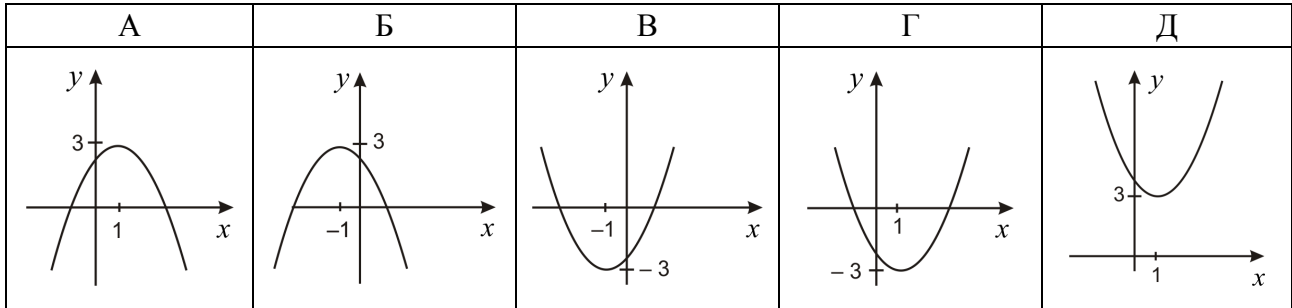
П.93 (Т-06, 3) Розв'яжіть рівняння $2(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2) + a^2 = 3a(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$, якщо $x \neq \frac{\pi}{2}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

П.94 (Т-07, 3) Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1)(2^x + \lg a) < 0$.

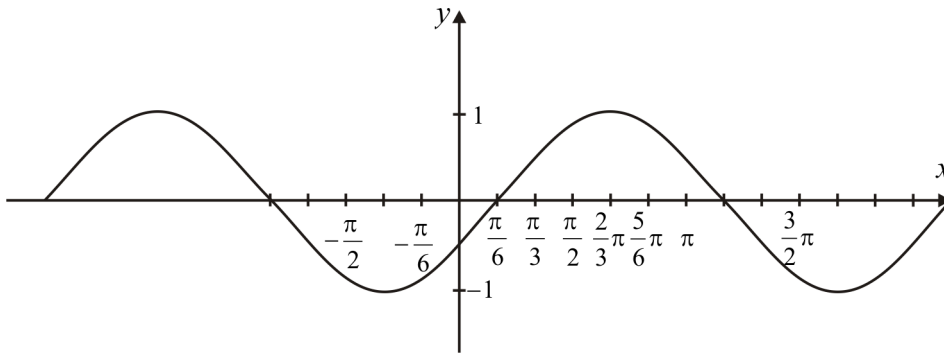
Розділ III. Функції

Завдання III.1 – III.45 мають по п'ять варіантів відповідей, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом.

III.1 Серед наведених графіків вкажіть графік функції $y = 3 - (x + 1)^2$.

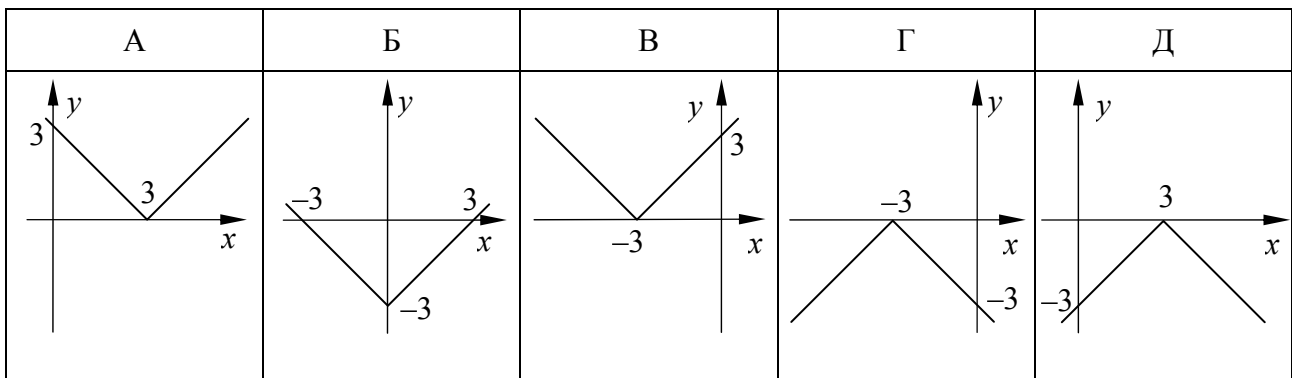


III.2 Графік якої з перелічених нижче функцій зображено на рисунку?

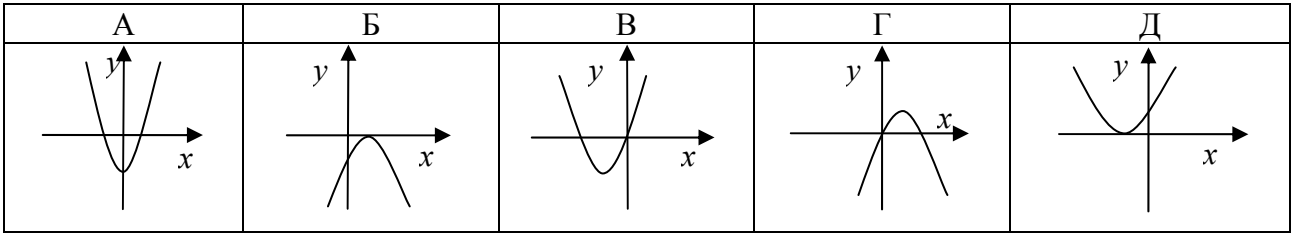


| А | Б | В | Г | Д |
|------------------------------|--|------------------------------|---|--|
| $y = \sin x - \frac{\pi}{6}$ | $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ | $y = \sin x + \frac{\pi}{6}$ | $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ | $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ |

III.3 (Т-06, 41) З-поміж наведених графіків укажіть графік функції $y = -|x + 3|$.



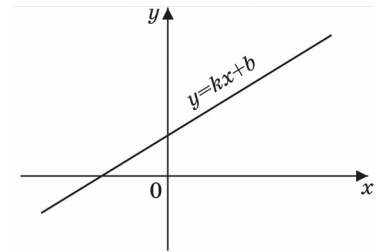
III.4 З-поміж наведених графіків укажіть графік функції $y = x^2 + bx + c$, якщо $b^2 - 4c = 0$.



III.5 Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = 2x + 3$ і $y = -x^2 + 7x - 3$.

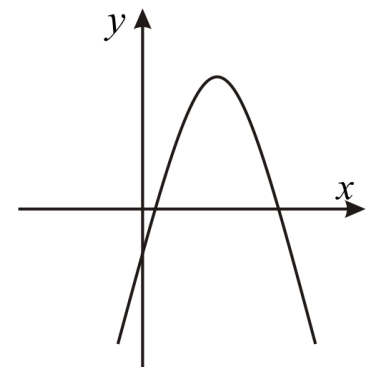
| | | | | |
|---------------------|----------------------|-------------------|---------------------|---------------------|
| А (-2; 7) і (-3; 9) | Б (2; -7) і (-3; -9) | В (2; 7) і (3; 9) | Г (-2; -7) і (3; 9) | Д (7; 2) і (-3; -9) |
|---------------------|----------------------|-------------------|---------------------|---------------------|

III.6 (Т-07, 44) За видом графіка функції $y = kx + b$ визначте знаки коефіцієнтів k і b . Оберіть правильне твердження.



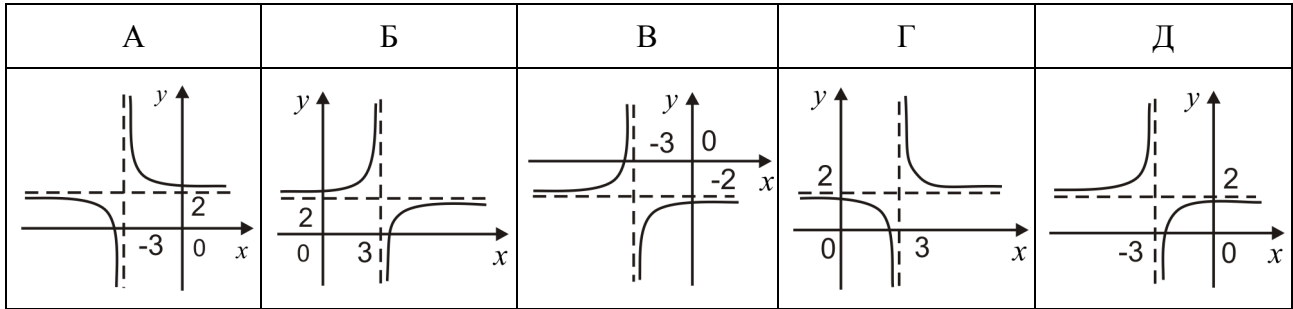
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\begin{cases} k > 0, \\ b < 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} k < 0, \\ b > 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} k < 0, \\ b < 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} k > 0, \\ b > 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} k = 0, \\ b > 0 \end{cases}$ |

III.7 За видом графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ визначте знаки коефіцієнтів a , b , c . Оберіть правильне твердження.

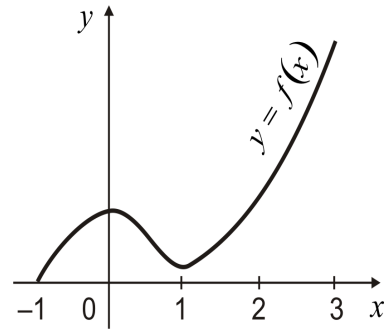


| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0. \end{cases}$ | $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > 0. \end{cases}$ | $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0. \end{cases}$ | $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$ | $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0. \end{cases}$ |

III.8 Серед наведених графіків вкажіть графік функції $y = 2 - \frac{1}{x+3}$

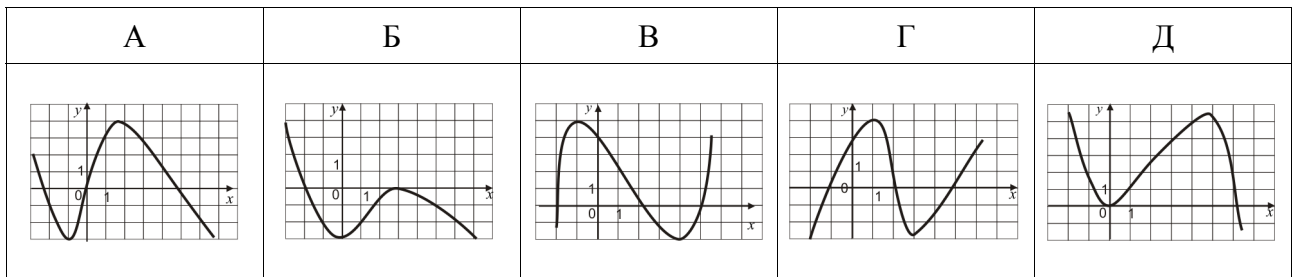


III.9 Вкажіть, на якому проміжку функція $y = f(x)$, задана графіком на відрізку $[-1;3]$, спадає.

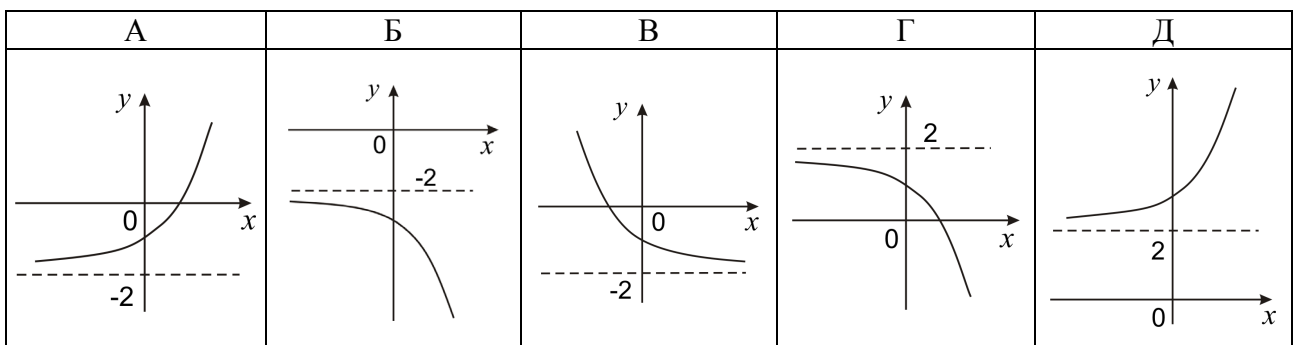


| | | | | |
|---------|----------|---------|---------|---------|
| А (0;1) | Б (-1;0) | В (1;2) | Г (1;3) | Д (2;3) |
|---------|----------|---------|---------|---------|

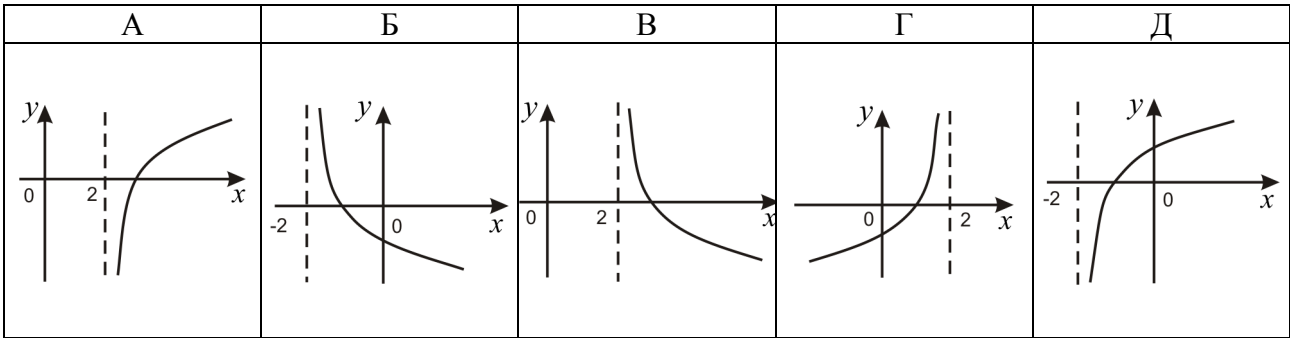
III.10 Укажіть рисунок, на якому функція, що задана графіком, зростає на проміжку $[0;4]$.



III.11 Серед наведених графіків укажіть графік функції $y = 2 - 2^x$.



III.12 Серед наведених графіків вкажіть графік функції $y = -\log_3(x+2)$.



III.13 Задано функції: 1) $y = x - 2$; 2) $y = \sqrt{(x-2)^2}$; 3) $y = (\sqrt{x-2})^2$. Укажіть правильне твердження.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------------------|--|---|---|----------------------------|
| графіки всіх функцій співпадають | співпадають тільки графіки першої і другої функцій | співпадають тільки графіки першої і третьої функцій | співпадають тільки графіки другої і третьої функцій | графіки всіх функцій різні |

III.14 (Т-06, 28) Укажіть непарну функцію.

| | | | | |
|-----------------|--------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| А $y = x^2 - 4$ | Б $y = -x^2$ | В $y = x^3 - 1$ | Г $y = \sqrt{x-2}$ | Д $y = x^3 - x$ |
|-----------------|--------------|-----------------|--------------------|-----------------|

III.15 (Т-07, 63) Укажіть парну функцію.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------|-----------|---------------------------|----------------|-----------|
| $y = x$ | $y = 2^x$ | $y = \operatorname{tg} x$ | $y = \log_2 x$ | $y = x^2$ |

III.16 Укажіть непарну функцію, областю значень якої є проміжок $[-1;1]$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------------|----------------------------|---------|--------------|--------------|
| $y = \operatorname{tg} x$ | $y = \operatorname{ctg} x$ | $y = x$ | $y = \sin x$ | $y = \cos x$ |

III.17 Укажіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x - 1} + 2$.

| | | | | |
|-----|-----|-----|------|---------|
| А 2 | Б 3 | В 9 | Г 11 | Д немає |
|-----|-----|-----|------|---------|

III.18 Вкажіть найменше значення функції $y = 5 + \sqrt{(x-4)^2}$.

| | | | | |
|-----|-----|-----|------|-----|
| А 4 | Б 6 | В 5 | Г -1 | Д 1 |
|-----|-----|-----|------|-----|

III.19 (Т-06, 45) Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{x+2}}{2^x - 1}$.

| | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|--------------|
| А $[-2; 0) \cup (0; +\infty)$ | Б $[-2; +\infty)$ | В $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$ | Г $(-\infty; -2]$ | Д $x \neq 1$ |
|-------------------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|--------------|

III.20 (Т-07, 64) Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{x+9}$.

| | | | | |
|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $[3; +\infty)$ | $[9; +\infty)$ | $[-3; +\infty)$ | $[-9; +\infty)$ | $[-9; 9]$ |

III.21 Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{-1-x}$.

| | | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $[-1; +\infty)$ | $(-\infty; -1]$ | $(-\infty; 1]$ | $[1; +\infty)$ | Інша відповідь |

III.22 Вкажіть область визначення функції $y = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$.

| | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------|-------------|-------------|
| А $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$ | Б $(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$ | В $(-2; 5)$ | Г $[-2; 5]$ | Д $(-2; 5]$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------|-------------|-------------|

III.23 Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$.

| | | | | |
|------------|------------|------------------|------------------------------------|------------------|
| А $(1; 4)$ | Б $[1; 4]$ | В $(-\infty; 1]$ | Г $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ | Д $[4; +\infty)$ |
|------------|------------|------------------|------------------------------------|------------------|

III.24 Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{\lg(x-1)}$.

| | | | | |
|--------------|------------------------------|--------------|------------------|------------------|
| А $x \neq 1$ | Б $(1; 2) \cup (2; +\infty)$ | В $x \neq 2$ | Г $(-\infty; 1)$ | Д $(1; +\infty)$ |
|--------------|------------------------------|--------------|------------------|------------------|

III.25 Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{1 - \log_{0,5} x}$.

| | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--|
| А $[0,5; +\infty)$ | Б $(-\infty; 0,5]$ | В $(-\infty; 0,5)$ | Г $(0,5; +\infty)$ | Д $(-\infty; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--|

III.26 Знайдіть множину значень функції $y = \cos^2 x - \sin^2 x$.

| | | | | |
|-------------|------------|------------------------|-------------|------------|
| А $[-1; 1]$ | Б $[0; 1]$ | В $(-\infty; +\infty)$ | Г $[-2; 2]$ | Д $[0; 2]$ |
|-------------|------------|------------------------|-------------|------------|

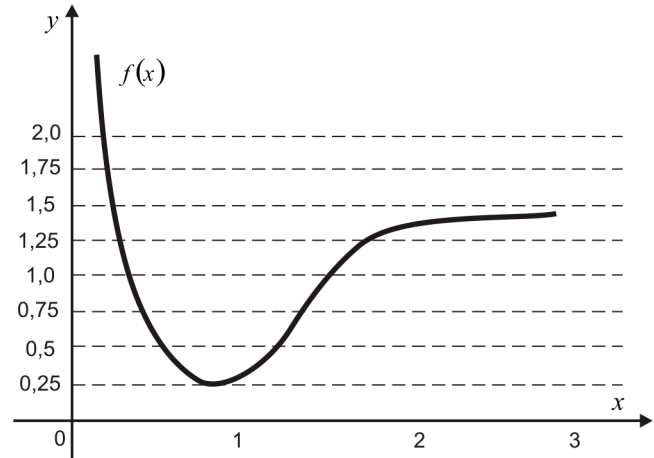
III.27 (Т-06, 26) Знайдіть множину значень функції $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

| | | | | |
|------------|------------|---------------------------|------------|------------------|
| А $[1; 2]$ | Б $[0; 2]$ | В $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ | Г $[0; 1]$ | Д інша відповідь |
|------------|------------|---------------------------|------------|------------------|

III.28 З'ясуйте, для якої із заданих функцій проміжок $(0; +\infty)$ є її областю значень.

| | | | | |
|------------------|------------------|---------------|-----------------------------|----------------|
| А $y = \log_5 x$ | Б $y = \sqrt{x}$ | В $y = 0,3^x$ | Г $y = \operatorname{tg} x$ | Д $y = \sin x$ |
|------------------|------------------|---------------|-----------------------------|----------------|

III.29 На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть найбільше значення функції $z = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$.



| | | | | |
|-----|--------|-----|-----|------------|
| А 2 | Б 0,25 | В 0 | Г 4 | Д не існує |
|-----|--------|-----|-----|------------|

III.30 Знайдіть похідну функції $f(x) = 6x^2 + e^{4x-4}$ у точці $x_0 = 1$.

| | | | | |
|------|------|------|------|------|
| А 15 | Б 16 | В 12 | Г 13 | Д 10 |
|------|------|------|------|------|

III.31 Обчисліть $f'(-1)$, якщо $f(x) = \frac{2}{1-x}$.

| | | | | |
|-------|--------|------|-----|------------------|
| А 0,5 | Б -0,5 | В -1 | Г 1 | Д інша відповідь |
|-------|--------|------|-----|------------------|

III.32 Знайдіть проміжки зростання функції $y = x^2 + 6x + 8$.

| | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------|------------------|------------------|
| А $(-3; +\infty)$ | Б $(-\infty; -3)$ | В $(-3; 3)$ | Г $(3; +\infty)$ | Д $(-\infty; 3)$ |
|-------------------|-------------------|-------------|------------------|------------------|

III.33 Обчисліть $f'(1)$, якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, і додатним напрямком осі ОХ дорівнює 30° .

| | | | | |
|------------------------|-----------------|------------------------|--------------|-----|
| А $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | Б $\frac{1}{2}$ | В $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | Г $\sqrt{3}$ | Д 1 |
|------------------------|-----------------|------------------------|--------------|-----|

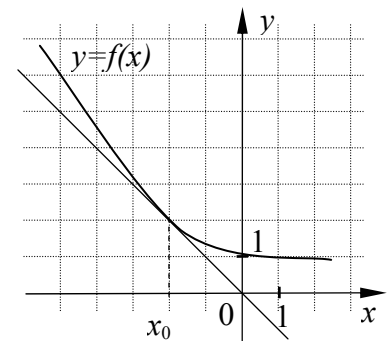
III.34 До графіка функції $y = -0,5x^2$ проведено дотичну у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Обчисліть тангенс кута нахилу цієї дотичної до додатного напрямку осі абсцис.

| | | | | |
|------|----|---|---|-----|
| А | Б | В | Г | Д |
| -4,5 | -3 | 0 | 3 | 4,5 |

III.35 Знайдіть стаціонарні точки функції $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

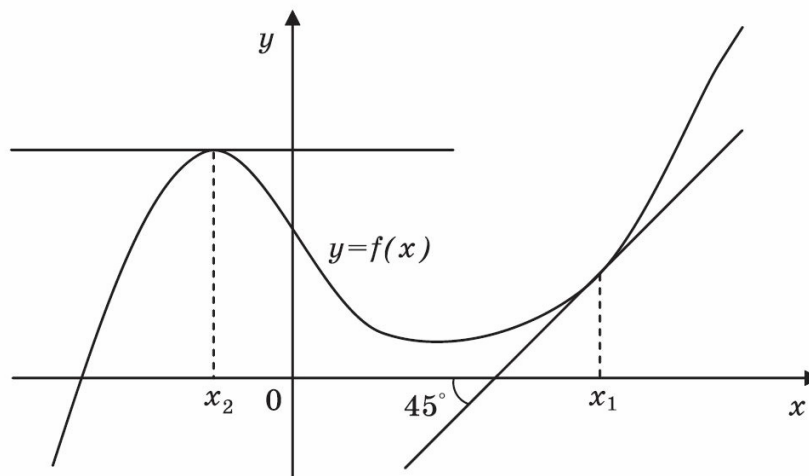
| | | | | |
|-----|------|-----|------|------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 1;2 | -1;0 | 0;2 | -1;2 | -2;1 |

III.36 (Т-06, 14) На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.



| | | | | |
|----|----|---|---|---|
| А | Б | В | Г | Д |
| -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |

III.37 (Т-07, 33) На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$.



| | | | | |
|---|----------------------|------------|---------------|----------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

III.38 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $A(1; 1)$.

| | | | | |
|-----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| А $y = -2x + 2$ | Б $y = 2x - 1$ | В $y = 2x + 1$ | Г $y = -2x - 1$ | Д $y = 2x - 2$ |
|-----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|

III.39 Знайдіть ординату точки на параболі $y = 2x^2 + 12x - 5$, в якій кутковий коефіцієнт дотичної до параболи дорівнює 8.

| | | | | |
|-------|------|------|------|------|
| А -15 | Б -5 | В -1 | Г 16 | Д 15 |
|-------|------|------|------|------|

III.40 Обчисліть $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

| | | | | |
|-----|-----------|-----------|------|-----|
| А 3 | Б $\ln 2$ | В $\ln 3$ | Г -3 | Д 1 |
|-----|-----------|-----------|------|-----|

III.41 Обчисліть $\int_2^3 5x^4 dx$.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| А | Б | В | Г | Д |
| 129 | 171 | 201 | 211 | 227 |

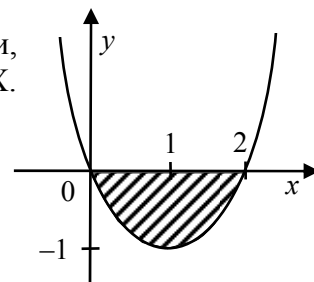
III.42 Вкажіть первісну функції $y = 2x - 4$, графік якої проходить через точку $A(0;1)$.

| | | | | |
|-----|------------------|----------------|-------------------|--------------|
| А 2 | Б $x^2 - 4x + 1$ | В x^{2-4x+1} | Г $2x^2 - 4x + 1$ | Д $x^2 - 4x$ |
|-----|------------------|----------------|-------------------|--------------|

III.43 (Г-07, 39) Знайдіть первісну функції $f(x) = 2x + 2$, графік якої проходить через точку з координатами $(1;4)$.

| | | | | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $F(x) = x^2 + 2x$ | $F(x) = x^2 + 2x + 1$ | $F(x) = x^2 + 2x + 2$ | $F(x) = x^2 + 2x - 4$ | $F(x) = x^2 + 2x - 23$ |

III.44 Укажіть формулу для обчислення площі фігури, обмеженої графіком функції $y = x(x - 2)$ і віссю OX .



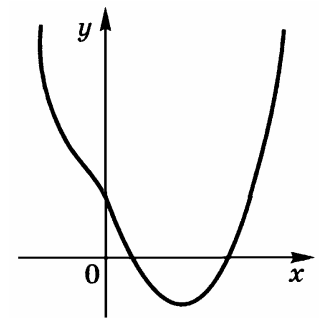
| | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\int_0^2 x(2-x)dx$ | $\int_0^1 x(2-x)dx$ | $\int_0^2 x(x-2)dx$ | $\int_0^1 x(x-2)dx$ | $\int_1^2 x(x-2)dx$ |

III.45 Укажіть формулу для обчислення площі фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ та $y = -x^2 + 4x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------|
| $S = \int_0^2 4x \, dx$ | $S = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) \, dx$ | $S = \int_0^2 (2x^2 + 4x) \, dx$ | $S = \int_0^2 (4x - 2x^2) \, dx$ | інша відповідь |

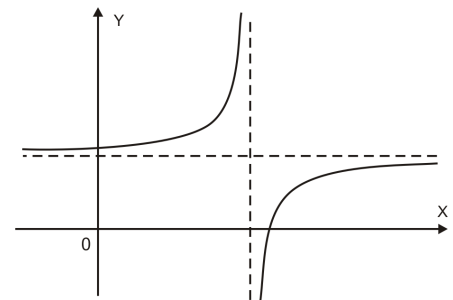
В завданнях III.46 – III.62 правильна відповідь оцінюється 2 балами.

III.46 (Т-06, 31) На рисунку зображено графік функції $f(x) = x^4 - x^2 + bx + c$. Визначте знаки параметрів b і c . У відповіді вкажіть номер правильного варіанта з наведених нижче.



1. $\begin{cases} b > 0, \\ c > 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} b > 0, \\ c < 0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} b < 0, \\ c > 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$

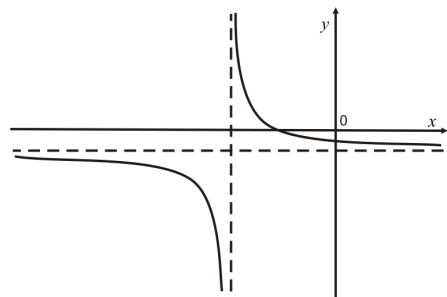
III.47 За ескізом графіка функції $y = \frac{ax+b}{x+c}$ визначіть знаки параметрів a, b, c . У відповіді вкажіть номер правильного варіанта з наведених нижче.



1. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$

III.48 За ескізом графіка функції $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ визначіть знаки параметрів a, b, c .

У відповіді вкажіть номер правильного варіанта з наведених нижче.



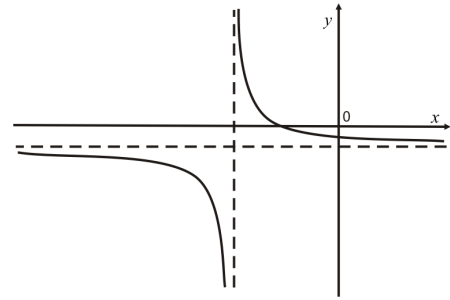
1. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$

III.49 За ескізом графіка функції $y = \frac{ax+b}{x+c}$

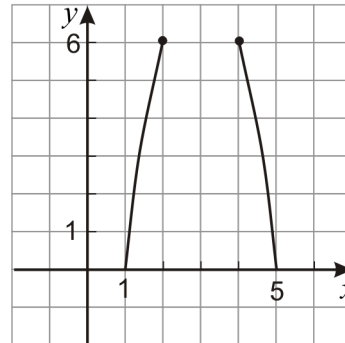
визначте знаки параметрів a, b, c .

У відповіді вкажіть номер правильного варіанта з наведених нижче:

1. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$



III.50 На рисунку представлений фрагмент параболи. Знайдіть ординату вершини параболи.



III.51 Знайдіть найменше значення функції $f(x) = 2|x - 3| + |x + 4|$

III.52 Знайдіть, при яких значеннях параметра a дотична до графіка функції $y = x^3 + ax^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$ проходить через точку $N(3;4)$.

III.53 Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на відрізку $[-1;3]$

III.54 (Т-07, 31) Знайдіть найбільше значення функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на проміжку $[-1;1]$.

III.55 Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 12x$ на відрізку $[-3; 1]$.

III.56 Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{2x^2 + 6}{x + 1}$ на проміжку $[-5; -2]$.

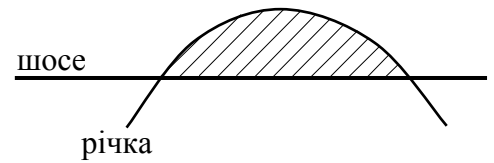
III.57 Обчисліть значення похідної функції $f(x) = 4x \ln x + 5$ при $x = e$.

III.58 (Т-06, 31) Відрізок 12 см завдовжки поділили на дві частини так, що сума площ квадратів, побудованих на цих частинах, стала найменшою. Обчисліть суму площ квадратів.

III.59 Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ та віссю абсцис.

III.60 Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 2x + 2$ та $y = 2 + 4x - x^2$.

III.61 (Т-06, 13) Річка тече лугом і двічі перетинає шосе, утворюючи криву $y = 3x - x^2$. Яка площа луку між шосе та річкою, якщо вважати, що лінія шосе збігається з віссю ОХ (див. рис.)? Одиниця довжини – 1 км.



III.62 Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = 2t + 1$ м/с. Знайдіть шлях (у метрах), який проходить тіло за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с.

Розв'язання завдань III.63 – III.68 повинне мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями.

III.63 Побудуйте графік функції $y = \frac{\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 2|}{2}$.

III.64 (Т-07, 12) Побудуйте графік функції $y = \frac{\sqrt{-x} + |4 - \sqrt{-x}|}{2}$.

III.65 Задано функцію $f(x) = 3x + \cos x$.

1. Визначте проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

2. Розв'яжіть рівняння $f(x) = \frac{3\pi}{2}$.

III.66 Задано функцію $f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2+2x+x-2}}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right) + \log_3 2}$.

Знайдіть:

а) область визначення заданої функції;

б) нулі заданої функції;

в) усі розв'язки нерівності $f(x) \leq 0$.

III.67 Задано функцію $f(x) = \frac{(\sqrt{3+x} + x - 3)(x^2 - 3x - 4)}{|2x + 3| - |3x + 2|}$.

Знайдіть:

а) область визначення функції;

б) нулі функції;

в) усі розв'язки нерівності $f(x) \geq 0$.

III.68 Задано функцію $f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2+2x+x-2}}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right) + \log_3 2}$.

Знайдіть:

а) область визначення заданої функції;

б) нулі заданої функції;

в) усі розв'язки нерівності $f(x) \leq 0$.

Розділ IV. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики

Завдання IV.1 – IV.9 мають по п'ять варіантів відповідей, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом.

IV.1 У коробці шість однакових кубиків, які занумеровані числами від 1 до 6. По одному витягають усі кубики. Знайдіть імовірність того, що номери витягнутих кубиків з'являться у порядку зростання.

| | | | | |
|-------------------|-----------------|------------------|-----|--------------------------------|
| А $\frac{1}{720}$ | Б $\frac{1}{6}$ | В $\frac{1}{64}$ | Г 1 | Д $\left(\frac{1}{6}\right)^6$ |
|-------------------|-----------------|------------------|-----|--------------------------------|

IV.2 (Т-07, 33) З натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?

| | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\frac{1}{30}$ | $\frac{2}{30}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{6}{15}$ | $\frac{7}{15}$ |

IV.3 У коробці лежать різнокольорові кульки, з яких 40 – червоні, 20 – коричневі, а всі, що залишилися – жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює 0,75.

| | | | | |
|----|----|----|-----|-----|
| А | Б | В | В | В |
| 20 | 30 | 60 | 120 | 180 |

IV.4 Власник банкоматної картки забув останні дві цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайдіть імовірність того, що з першої спроби він отримає доступ до системи. (Т-06, 31)

| | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| А $\frac{1}{2}$ | Б $\frac{1}{25}$ | В $\frac{1}{50}$ | Г $\frac{1}{90}$ | Д $\frac{1}{100}$ |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|

IV.5 Задано цифри 1; 2; 3; 4; 5; 6. З них утворюють всі можливі шестицифрові числа, використовуючи кожен цифру тільки один раз. Знайдіть імовірність того, що взяте навмання одне з цих чисел ділитиметься на 5.

| | | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| А $\frac{1}{720}$ | Б $\frac{1}{120}$ | В $\frac{1}{24}$ | Г $\frac{1}{6}$ | Д $\frac{1}{5}$ |
|-------------------|-------------------|------------------|-----------------|-----------------|

IV.6 Задано цифри 2; 3; 4; 5; 6. Знайдіть кількість непарних п'ятицифрових чисел, які можна скласти із цифр, використовуючи кожен цифру тільки один раз.

| | | | | |
|------|------|------|-------|-------|
| А 24 | Б 48 | В 72 | Г 120 | Д 240 |
|------|------|------|-------|-------|

IV.7 Середній вік учнів одного класу дорівнює 16 років. Обчисліть середній вік цих учнів через рік.

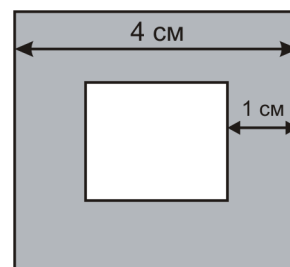
| А | Б | В | Г | Д |
|----------|----------|------------|----------|---------------------|
| 15 років | 16 років | 16,5 років | 17 років | Неможливо обчислити |

IV.8 Скількома різними способами можна скласти триколовий прапор з горизонтальними смугами заданої ширини (див. рис.), якщо є тканина шести різних кольорів?



| | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| А 18 | Б 20 | В 120 | Г 216 | Д 720 |
|------|------|-------|-------|-------|

IV.9 У квадраті зі стороною 4 см відмічають точку. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої сторони квадрата менше 1 см?



| | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| А $\frac{1}{4}$ | Б $\frac{1}{3}$ | В $\frac{3}{4}$ | Г $\frac{1}{2}$ | Д 1 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|

В завданнях IV.10 – IV.11 правильна відповідь оцінюється 2 балами.

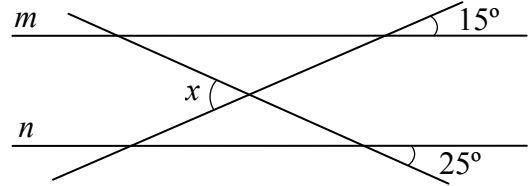
IV.10 Учаснику телевізійного шоу дозволяється відімкнути довільні два сейфи із п'яти запропонованих (у двох із них лежать призи, а інші – порожні). Обчисліть ймовірність отримання двох призів.

IV.11 Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри одного з футболістів було вилучено з поля, після чого середній вік гравців, що залишилися, став 21 рік. Скільки років футболісту, який залишив поле? (Т-07, 26)

Розділ V. Планіметрія

Завдання V.1 – V.32 мають по п'ять варіантів відповідей, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом.

V.1 (Т-06, 63) Прямі m і n паралельні.
Обчисліть величину кута x , зображеного на
рисунку.

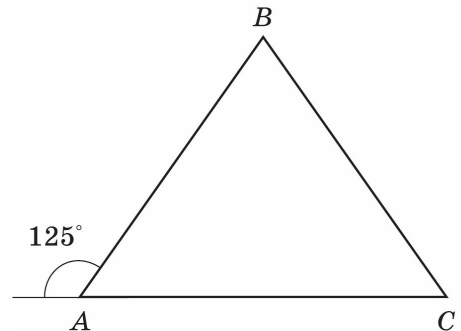


| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|--------|
| А 40° | Б 45° | В 50° | Г 80° | Д 140° |
|-------|-------|-------|-------|--------|

V.2 У прямокутному трикутнику висота, яка опущена з вершини прямого кута, дорівнює 4 см, а гострий кут дорівнює 30°. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника.

| | | | | |
|------|--------------------------|--------------------------|------|---------------|
| А 32 | Б $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ | В $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ | Г 16 | Д $8\sqrt{3}$ |
|------|--------------------------|--------------------------|------|---------------|

V.3 (Т-07, 66) Градусна міра зовнішнього кута А рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) становить 125°. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута В.

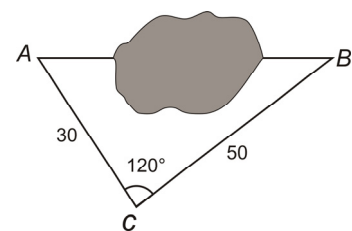


| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| А 30° | Б 40° | В 50° | Г 60° | Д 70° |
|-------|-------|-------|-------|-------|

V.4 На сторонах АВ і ВС трикутника ABC позначені відповідно точки М і К так, що прямі МК і АС паралельні. Знайдіть довжину сторони АВ, якщо $AM=AC=6$, а $MK=2$.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| А 6 | Б 9 | В 3 | Г 8 | Д 5 |
|-----|-----|-----|-----|-----|

V.5 Виміряти відстань між точками А і В безпосередньо перешкоджає ставок. Для знаходження відстані АВ виміряли відстані від точок А і В до певної точки С та виміряли кут АСВ. Обчисліть відстань АВ, якщо одержали такі результати вимірювань: $AC = 30$ м, $BC = 50$ м $\angle ACB = 120^\circ$.



| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| А 90 м | Б 85 м | В 80 м | Г 75 м | Д 70 м |
|--------|--------|--------|--------|--------|

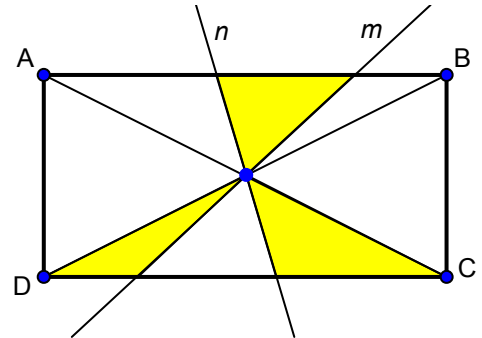
V.6 Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см, а один із катетів – 6 см.

| | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 15 см ² | 24 см ² | 30 см ² | 48 см ² | 60 см ² |

V.7 Чотирикутник ABCD – паралелограм. Відомо, що AB = 1 см, BC = 2 см, ∠A = 60°. Знайдіть діагональ BD.

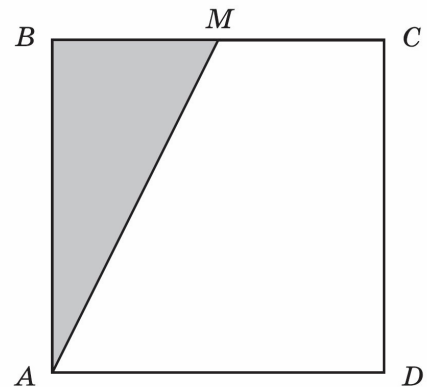
| | | | | |
|--------|-----------------|-----------------|--------|-----------------|
| А 3 см | Б $\sqrt{3}$ см | В $\sqrt{5}$ см | Г 5 см | Д $\sqrt{6}$ см |
|--------|-----------------|-----------------|--------|-----------------|

V.8 (Т-06, 47) У прямокутнику ABCD прямі m і n проходять через точку перетину діагоналей. Площа фігури, що складається з трьох зафарбованих трикутників, дорівнює 12 см². Обчисліть площу прямокутника ABCD.



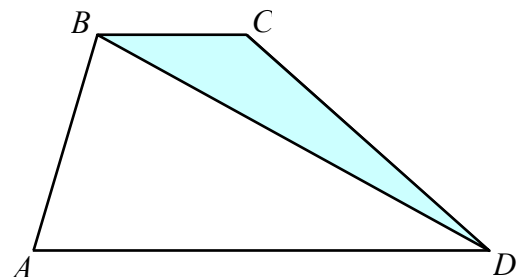
| | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| А 24 см ² | Б 30 см ² | В 36 см ² | Г 42 см ² | Д 48 см ² |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|

V.9 (Т-07, 76) Точка М – середина сторони квадрата ABCD. Площа зафарбованої частини дорівнює 7 см². Знайдіть площу всього квадрата.



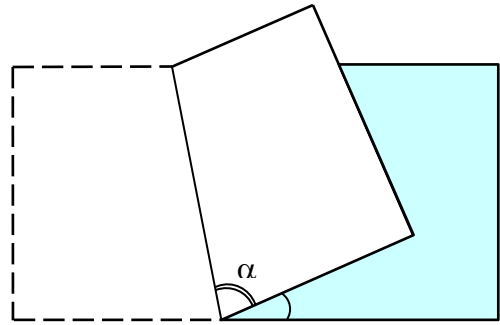
| | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 14 см ² | 21 см ² | 28 см ² | 35 см ² | 42 см ² |

V.10 У трапеції ABCD основи BC і AD відносяться як 1:3. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника BCD дорівнює 2 см².



| | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 4 см ² | 6 см ² | 8 см ² | 10 см ² | 12 см ² |

V.11 Лист паперу прямокутної форми зігнули і наклали одну частину на іншу так, як показано на рисунку. Кут β дорівнює 30° . Обчисліть градусну міру кута α .

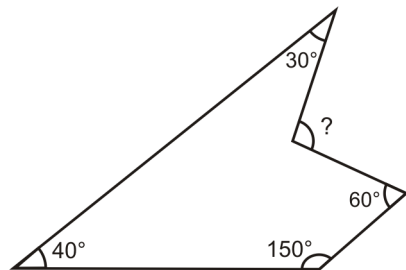


| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| А 60° | Б 70° | В 75° | Г 80° | Д 90° |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|

V.12 Знайдіть внутрішній кут правильного восьмикутника.

| | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| А 45° | Б 105° | В 110° | Г 125° | Д 135° |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|

V.13 Визначте зовнішній кут многокутника.

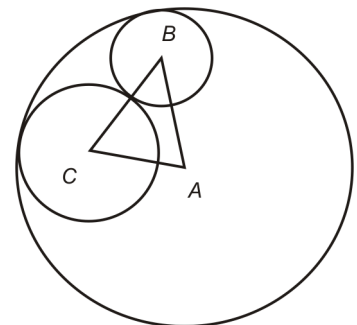


| | | | | |
|---------------|---------------|--------------|--------------|---------------|
| А 120° | Б 110° | В 90° | Г 95° | Д 100° |
|---------------|---------------|--------------|--------------|---------------|

V.14 Знайдіть радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 24см.

| | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|---------|
| А $2\sqrt{3}$ см | Б $4\sqrt{3}$ см | В $6\sqrt{3}$ см | Г $8\sqrt{3}$ см | Д 15 см |
|------------------|------------------|------------------|------------------|---------|

V.15 Два кола з центрами у точці В і точці С дотикаються внутрішньо до кола з центром у точці А і дотикаються одне до одного зовні. Радіус найбільшого з кіл дорівнює 12. Знайдіть периметр трикутника АВС.



| | | | | |
|------|------|------|------|------|
| А 20 | Б 24 | В 26 | Г 28 | Д 36 |
|------|------|------|------|------|

V.16 Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC з тупим кутом A, дорівнює 1. Сторона $CB = \sqrt{3}$. Знайдіть кут A.

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|-------|--------------|
| А 120° | Б 135° | В 145° | Г 150 | Д 60° |
|---------------|---------------|---------------|-------|--------------|

V.17 Серед векторів $\vec{a} = (-2; 4)$, $\vec{b} = (2; 2)$, $\vec{c} = (0; -1)$, $\vec{d} = (1; -2)$ знайдіть колінеарні.

| | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| А \vec{d} і \vec{b} | Б \vec{a} і \vec{d} | В \vec{a} і \vec{c} | Г \vec{d} і \vec{c} | Д \vec{c} і \vec{b} |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|

V.18 Знайдіть довжину вектора $\vec{a}(6; y)$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{b} + \vec{c}$, де $\vec{b}(-2; 0)$, $\vec{c}(0; 1)$.

| | | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|-----|
| А 7 | Б $4\sqrt{3}$ | В $5\sqrt{3}$ | Г $3\sqrt{5}$ | Д 6 |
|-----|---------------|---------------|---------------|-----|

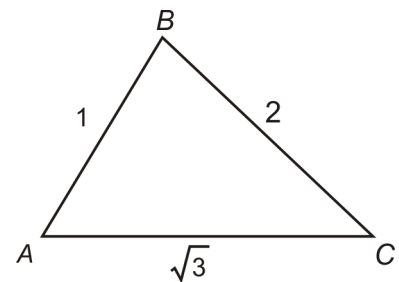
V.19 На площині дано чотири точки A(1; 2), B(1; 5), C(3; 4), D(1; 4). Знайдіть кут між векторами \vec{AB} і \vec{CD} .

| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| А 45° | Б 30° | В 90° | Г 60° | Д 120° |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|

V.20 Висоти паралелограма 4 і 6 см, а кут між ними дорівнює 30° . Знайдіть площу паралелограма.

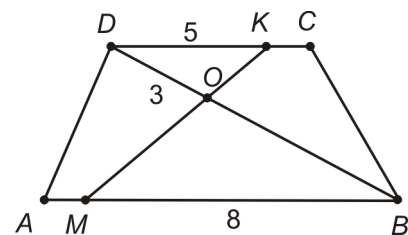
| | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| А 12 см^2 | Б 20 см^2 | В 24 см^2 | Г 36 см^2 | Д 48 см^2 |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

V.21 Знайдіть кут B трикутника ABC.



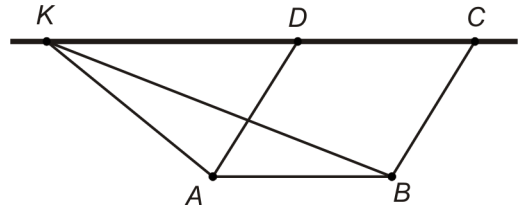
| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| А 30° | Б 45° | В 60° | Г 90° | Д 120° |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|

V.22 Точки K і M лежать на основах трапеції ABCD. Відрізок KM перетинає діагональ DB у точці O. Відомо, що DK = 5, MB = 8, DO = 3. Знайдіть довжину відрізка OB.



| | | | | |
|-------|-------|-----|-------|-----|
| А 4,6 | Б 4,8 | В 5 | Г 5,2 | Д 6 |
|-------|-------|-----|-------|-----|

V.23 Площа паралелограма ABCD дорівнює 12. Точка K лежить на прямій CD. Знайдіть площу трикутника ABK.

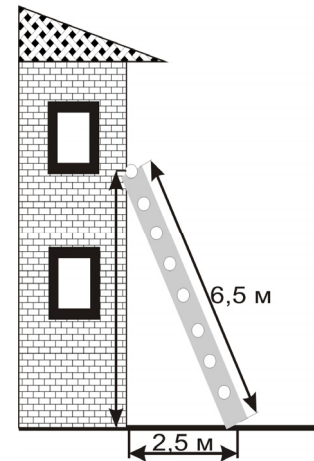


| | | | | |
|-----|-----|-----|------|------|
| А 4 | Б 6 | В 8 | Г 10 | Д 12 |
|-----|-----|-----|------|------|

V.24 Трапеція, з бічною стороною 8 см, вписана в коло. Діагональ трапеції утворює з більшою основою кут α , для якого $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Обчисліть радіус описаного навколо трапеції кола.

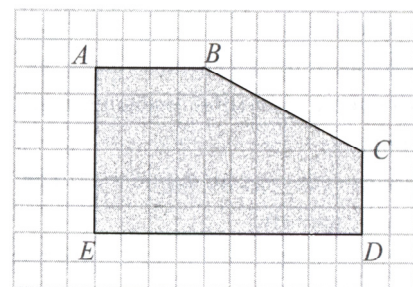
| | | | | |
|--------|----------|--------|-------|--------|
| А 4 см | Б 4,8 см | В 5 см | Г 6,4 | Д 8 см |
|--------|----------|--------|-------|--------|

V.25 Драбину, довжиною 6,5 м приставили до стіни будинку на рівні вікна (див. рис.). Нижній кінець драбини знаходиться на відстані 2,5 м від будинку. Знайдіть висоту, на якій розташовано вікно.



| | | | | |
|-------|----------|---------|----------|-------|
| А 5 м | Б 5,25 м | В 5,5 м | Г 5,75 м | Д 6 м |
|-------|----------|---------|----------|-------|

V.26 На папері зображено п'ятикутник ABCDE. Відомо, що площа однієї клітинки дорівнює 1 см^2 . Знайдіть площу п'ятикутника.

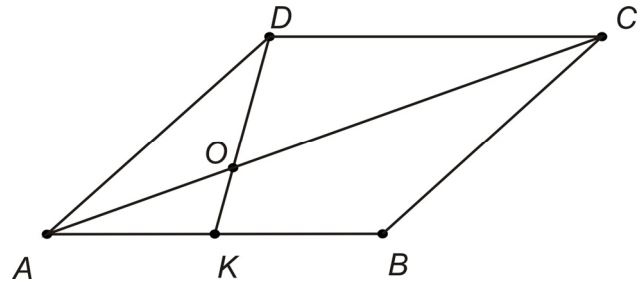


| | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| А 48 см^2 | Б 49 см^2 | В 50 см^2 | Г 51 см^2 | Д 52 см^2 |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

V.27 Катети прямокутного трикутника менші за гіпотенузу на 1 см та на 2 см відповідно. Знайдіть косинус найменшого кута трикутника.

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| А 0,2 | Б 0,4 | В 0,5 | Г 0,6 | Д 0,8 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

V.28 Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. Точка K – середина сторони AB . Відрізок DK перетинає діагональ AC у точці O . Знайдіть відношення довжин відрізків $AO:OC$.



| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| А 1:2 | Б 1:3 | В 2:3 | Г 3:4 | Д 3:5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

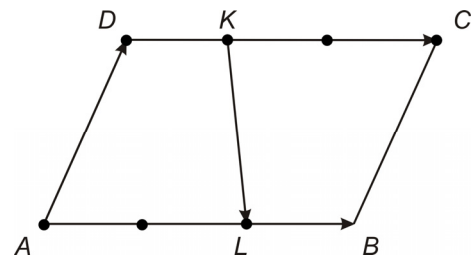
V.29 У трикутнику ABC : BB_1 – медіана, а $AB_1 = BB_1 = BC$. Знайдіть величину меншого кута трикутника ABC .

| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| А 10° | Б 30° | В 45° | Г 60° | Д 90° |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|

V.30 Вкажіть кількість осей симетрії правильного шестикутника.

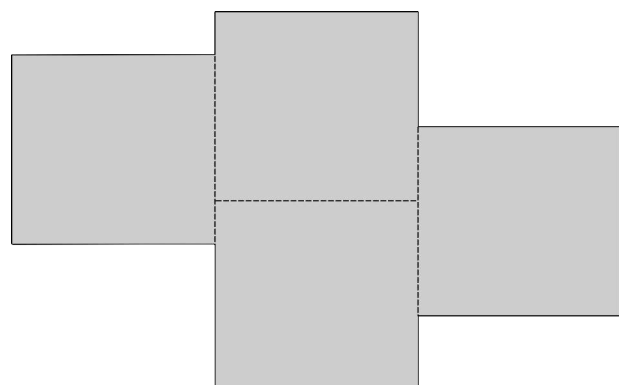
| | | | | |
|------|------|-----|-----|------------------|
| А 24 | Б 12 | В 6 | Г 3 | Д інша відповідь |
|------|------|-----|-----|------------------|

V.31 Дано паралелограм $ABCD$: $\overline{AB} = \overline{p}$, $\overline{AD} = \overline{q}$. точка L ділить сторону AB у відношенні 2:1, а точка K – сторону DC у відношенні 1:2. Виразіть вектор \overline{KL} через вектори \overline{p} і \overline{q} .



| А | Б | В | Г | Д |
|--|--|--|--|--|
| $\frac{1}{3}\overline{p} - \overline{q}$ | $\overline{p} - \frac{1}{3}\overline{q}$ | $\frac{1}{3}\overline{p} + \overline{q}$ | $\overline{p} + \frac{1}{3}\overline{q}$ | $\frac{2}{3}\overline{p} + \overline{q}$ |

V.32 Многокутник, зображений на рисунку, складено з чотирьох рівних квадратів. Знайдіть площу многокутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.



| | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| А 25 см^2 | Б 24 см^2 | В 20 см^2 | Г 18 см^2 | Д 16 см^2 |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

В завданнях V.33 – V.45 правильна відповідь оцінюється 2 балами.

V.33 Основи трапеції дорівнюють 11 см і 4 см, а діагоналі 9 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції, в см^2 .

V.34 Дано точки A (-8; -2), B (-4; 3) і C (-1; -3). Точка D належить прямій $y=4$ та $AD \perp BC$. Знайдіть координати точки D.

V.35 З вершин B і D прямокутника ABCD до діагоналі AC проведені перпендикуляри BE та DF. Відстань між точками E та F дорівнює 16 см, а $BE = 24$ см. Обчисліть площу прямокутника, у см^2

V.36 Знайдіть тангенс кута між векторами $\vec{a}(1;-2)$ та $\vec{b}(3;4)$.

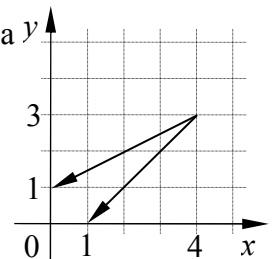
V.37 Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 6 см і 2 см, а площа трапеції дорівнює 8 см^2 . Знайдіть гострий кут трапеції, у градусах.

V.38 Знайдіть кут між векторами \vec{a} і $7\vec{b} + 2\vec{c}$, якщо відомо, що $\vec{a}(137;137\sqrt{3})$, $\vec{b}(-2;2)$ і $\vec{c}(7;-4)$, у градусах.

V.39 У трикутнику ABC бісектриси BD і AE внутрішніх кутів B і A перетинаються у точці O. Обчисліть довжину сторони AC, якщо $AB = 12$, $AO : OE = 3 : 2$ та $AD:DC=6:7$.

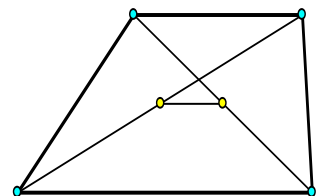
V.40 Середня лінія трапеції дорівнює 7, а висота $-\frac{15\sqrt{3}}{7}$. Кут між діагоналями трапеції дорівнює 120° . Знайдіть добуток довжин діагоналей трапеції.

V.41 (Т-06, 7) Обчисліть скалярний добуток векторів, зображених на у рисунку.



V.42 У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 6 см і 12 см. Обчисліть периметр трапеції, у см.

V.43 Більша основа трапеції дорівнює 18. Знайдіть її меншу основу, якщо відстань між серединами діагоналей дорівнює 4.



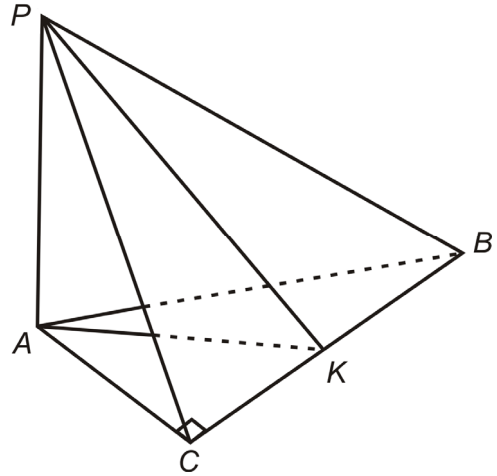
V.44 У квадраті ABCD сторона AB дорівнює 1,5 см. Знайдіть скалярний добуток $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

V.45 (Т-07, 21) Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 5 см. Знайдіть скалярний добуток $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Розділ VI. Стереометрія

Завдання VI.1 – VI.21 мають по п'ять варіантів відповідей, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом.

VI.1 Визначте на рисунку лінійний кут двогранного кута з ребром BC, якщо у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$ і $PA \perp (ABC)$.



| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\angle PCA$ | $\angle PKA$ | $\angle PBA$ | $\angle APK$ | Інша відповідь |

VI.2 Двогранний кут дорівнює 45° . Задано точку на одній із граней кута. Відстань від цієї точки до другої грані кута 12 см. Знайдіть відстань від заданої точки до ребра двогранного кута.

| | | | | |
|---------|-------------------|---------|---------------|------------------|
| А 14 см | Б $12\sqrt{2}$ см | В 12 см | Г $8\sqrt{2}$ | Д $6\sqrt{2}$ см |
|---------|-------------------|---------|---------------|------------------|

VI.3 Через точку O, точку перетину діагоналей квадрата ABCD, проведено перпендикуляр MO до його площини. Відомо, що $AD = 8$. Знайдіть відстань між прямими AB і MO.

| | | | | |
|-----|---------------|---------------|-----|-----|
| А 8 | Б $4\sqrt{2}$ | В $4\sqrt{5}$ | Г 4 | Д 2 |
|-----|---------------|---------------|-----|-----|

VI.4 Діагональ куба дорівнює 6 см. Знайдіть площу повної поверхні куба.

| | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| А 72 см^2 | Б 66 см^2 | В 60 см^2 | Г 54 см^2 | Д 48 см^2 |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

VI.5 Обчисліть довжину меншої діагоналі прямої призми, в основі якої ромб із стороною 6 м та гострим кутом 60° . Висота призми 8 м.

| | | | | |
|-------|---------|--------|--------|------------------|
| А 9 м | Б 9,5 м | В 10 м | Г 10,5 | Д $2\sqrt{43}$ м |
|-------|---------|--------|--------|------------------|

VI.6 В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 5 см та основами 4 і 10 см. Бічне ребро призми – 10 см. Обчисліть площу повної поверхні призми.

| | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| А 296 см^2 | Б 268 см^2 | В 256 см^2 | Г 240 см^2 | Д 184 см^2 |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|

VI.7 Осьовим перерізом циліндра є квадрат, сторона якого дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм циліндра.

| | | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| А $100\pi \text{ см}^3$ | Б $250\pi \text{ см}^3$ | В $80\pi \text{ см}^3$ | Г $150\pi \text{ см}^3$ | Д $200\pi \text{ см}^3$ |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|

VI.8 (Т-06, 31) Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо свого ребра, довжина якого a .

| | | | | |
|----------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| А $4a^3$ | Б πa^3 | В $2\pi a^2$ | Г $2\pi a^3$ | Д $4\pi a^3$ |
|----------|-------------|--------------|--------------|--------------|

VI.9 (Т-07, 27) Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a см.

| | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\frac{4}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{2}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{1}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{1}{6}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{1}{12}\pi a^3 \text{ см}^3$ |

VI.10 У прямокутника відношення сторін дорівнює $a:b$, $a < b$. Його спочатку обертають навколо більшої сторони, а потім навколо меншої. Знайдіть відношення об'єму першого утвореного тіла до об'єму другого.

| | | | | |
|---------------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------|-------------------------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $\pi\left(\frac{a}{b}\right)^3$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | $\frac{a}{b}$ | Відповідь не залежить від a і b |

VI.11 Циліндр вписано в куб. Відомо, що об'єм куба дорівнює 40 см^3 . Обчисліть об'єм циліндра.

| | | | | |
|---------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| А 30 см^3 | Б $10\pi \text{ см}^3$ | В $\pi^3 \text{ см}^3$ | Г $12\pi \text{ см}^3$ | Д $9\pi \text{ см}^3$ |
|---------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|

VI.12 Радіус основи конуса дорівнює 3 см. Об'єм конуса – $9\pi \text{ см}^3$. Знайдіть твірну конуса.

| | | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------|--------------------------|------------------|
| А $3\sqrt{2} \text{ см}$ | Б $\sqrt{8} \text{ см}$ | В 3 см | Г $\sqrt{10} \text{ см}$ | Д інша відповідь |
|--------------------------|-------------------------|--------|--------------------------|------------------|

VI.13 Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра другого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|
| А 2 | Б 3 | В 4 | Г 8 | Д 16 |
|-----|-----|-----|-----|------|

VI.14 Задано точку $A(-1; 2; 3)$. Укажіть координати точки, симетричної точці A відносно площини xu .

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------|---------------|-------------|---------------|----------------|
| $(-1; 2; -3)$ | $(-1; -2; 3)$ | $(1; 2; 3)$ | $(1; -2; -3)$ | Інша відповідь |

VI.15 Дано точку $P(-1; 3; 5)$. Знайдіть координати точки Q , симетричної точці P відносно координатної площини uz .

| А | Б | В | В | Д |
|-------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| $(1; 3; 5)$ | $(-1; -3; 5)$ | $(-1; 3; -5)$ | $(1; -3; -5)$ | $(1; -3; 5)$ |

VI.16 У просторі задані точки $A(2; 3; -5)$ і $M(1; -1; 2)$. Знайдіть координати точки C , яка симетрична точці A відносно точки M .

| | | | | |
|----------------|---------------|---------------|--------------------|-------------------|
| $A(-2; -3; 5)$ | $B(3; 2; -3)$ | $B(1; 4; -7)$ | $\Gamma(0; -5; 9)$ | $D(3,5; 1; -3,5)$ |
|----------------|---------------|---------------|--------------------|-------------------|

VI.17 Точка P симетрична точці $A(-2; -3; 4)$ відносно координатної площини xz . Знайдіть координати точки P .

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------|--------------|---------------|----------------|---------------|
| $(2; -3; 4)$ | $(-2; 3; 4)$ | $(-2; 3; -4)$ | $(-2; -3; -4)$ | $(2; -3; -4)$ |

VI.18 Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $A(1; 2; 3)$ відносно координатної площини xz .

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------------|----------------|
| $A(-1; 2; 3)$ | $B(1; -2; 3)$ | $B(1; 2; -3)$ | $\Gamma(-1; -2; 3)$ | $D(-1; 2; -3)$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------------|----------------|

VI.19 (Т-06, 24) Ортогональною проекцією відрізка з кінцями у точках $A(-1; 0; 5)$ і $B(-1; 0; 8)$ на координатну площину xu є

| А | Б | В | Г | Д |
|-------|---------|----------|-------|--|
| пряма | промінь | відрізок | точка | фігура, що відрізняється від перелічених |

VI.20 (Т-07, 39) Знайдіть координати точки M , відносно якої симетричні точки $E(-3; 8; 7)$ і $F(-9; 6; 1)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------|----------------|-------------|-------------|----------------|
| $(-6; 7; 4)$ | $(-12; 14; 8)$ | $(0; 0; 0)$ | $(3; 1; 3)$ | інша відповідь |

VI.21 На осі абсцис знайдіть точки, відстань від кожної з яких до точки $A(3;-3;0)$ дорівнює 5.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------|-----------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| $(3;-3;5), (3;-3;-5)$ | $(7;-3;3), (7;-3;-3)$ | $(7;0;0), (-1;0;0)$ | $(-1;7;0) (1;0;0)$ | $(-7;0;0), (1;0;0)$ |

В завданнях VI.22 – VI.37 правильна відповідь оцінюється 2 балами.

VI.22 Через вершину А гострого кута прямокутного трикутника ВАС до площини трикутника проведено перпендикуляр АМ довжиною 13 см. Відомо, що $\angle ACB = 30^\circ$, $BC = 6$ см. Знайдіть відстань від точки М до прямої ВС, у см.

V.46 Через вершину А гострого кута прямокутного трикутника ВАС до площини трикутника проведено перпендикуляр АМ, довжиною $\sqrt{13}$ см. Відомо, що $\angle ACB = 30^\circ$, $BC = 6$ см. Знайдіть відстань від точки М до прямої ВС, в см.

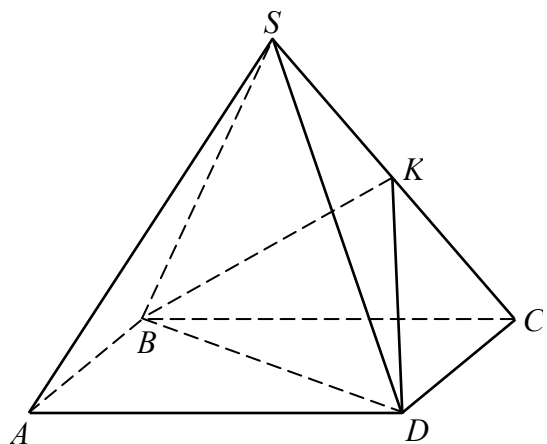
VI.23 Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди, в см^2 .

VI.24 Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 20 см^2 , 24 см^2 і 30 см^2 . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, у см^3 .

VI.25 Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер 5 см, 7 см і 9 см складено з кубиків з довжиною ребра 1 см. Скільки доведеться забрати кубиків, щоб вилучити весь зовнішній шар товщиною в один кубик?

VI.26 Обчисліть об'єм многогранника (у см^3), усі вершини якого лежать у центрах граней прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 см, 4 см, 5 см.

VI.27 Об'єм правильної чотирикутної піраміди SABCD дорівнює 60 м^3 . Точка К – середина ребра SC. Обчисліть об'єм піраміди KBCD, у м^3 .



VI.28 В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 5, 6 та 8 см, а всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° . Обчисліть об'єм піраміди, у см^3 .

VI.29 (Т-06, 12) Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Апофема утворює з площиною основи кут 60° . Обчисліть площу бічної поверхні піраміди (у см^2).

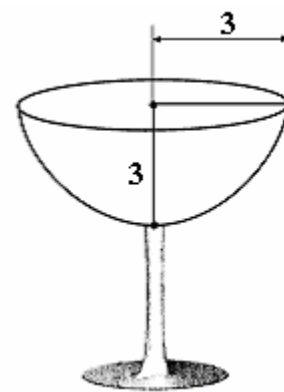
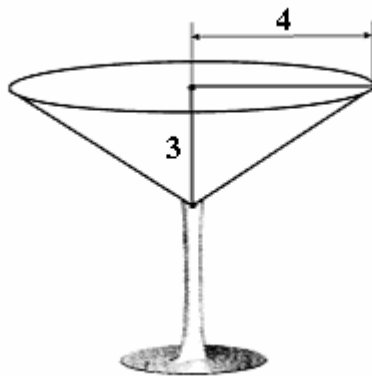
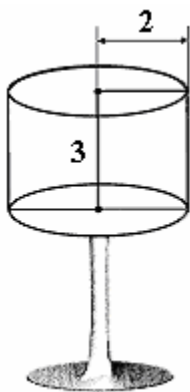
VI.30 (Т-07, 23) Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори із розрахунку: три одиниці на 50м^3 . Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда розміру $15\text{м}\times 18\text{м}\times 25\text{м}$?

VI.31 (Т-07, 23) Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилена під кутом 60° до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.

VI.32 Основою піраміди $SAB CDEF$ є правильний шестикутник $ABCDEF$. Грань SAD – правильний трикутник, площина якого перпендикулярна площині основи. Знайдіть тангенс кута нахилу грані SCD до основи.

VI.33 (Т-06, 46) Укажіть номер фужера, у який можна налити найбільше рідини.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|

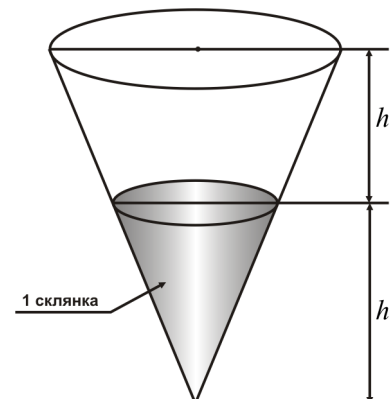


VI.34 Через вершину конуса з радіусом основи 4 см проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи конуса під кутом 120° , а з вершини конуса - під кутом 90° . Обчисліть площу перерізу, у см^2 .

VI.35 Діагоналі ромба дорівнюють 6 і 8. Куля, яка має радіус 4 дотикається до всіх його сторін. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.

VI.36 Бічна поверхня циліндра у розгортці є прямокутником. Діагональ прямокутника дорівнює $\sqrt[3]{4\pi}$ і утворює з основою прямокутника кут 30° . Обчисліть об'єм циліндра. Відповідь округліть до сотих.

VI.37 На рисунку зображено ємність, у яку налито одну склянку рідини. Обчисліть, на яку кількість повних склянок рідини розрахована ця ємність.

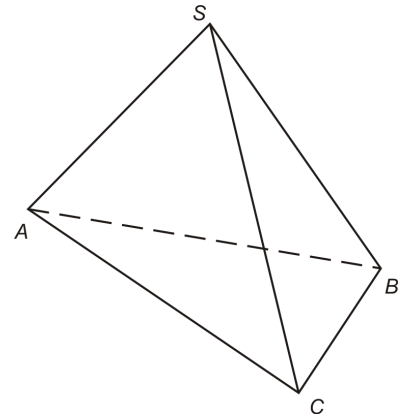


Розв'язання завдань VI.38 – VI.44 повинне мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями.

- VI.38 В основі піраміди лежить рівносторонній трикутник зі стороною a . Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є також правильним трикутником. Навколо піраміди описана куля. Знайдіть:
- довжину висоти піраміди, обґрунтувавши положення висоти піраміди;
 - радіус описаної навколо піраміди кулі.

- VI.39 Правильну піраміду $DABC$ (D – вершина) перетинає площина, паралельна ребрам AD і BC . Відомо, що $AB = a$, $AD = l$.
- Доведіть, що перерізом піраміди є прямокутник.
 - Знайдіть площу перерізу, якщо січна площина проходить через центр основи піраміди.
 - В якому відношенні січна площина повинна ділити ребро AB , щоб площа перерізу була найбільшою?

- VI.40 У правильній трикутній піраміді $SABC$ кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює β , сторона основи дорівнює a , SH – висота піраміди.
- Побудуйте на наведеному рисунку переріз піраміди площиною, що проходить через точку H паралельно ребрам SA і BC .
 - З'ясуйте, якою фігурою є переріз піраміди (відповідь обґрунтуйте).
 - Знайдіть площу перерізу піраміди.



- VI.41 Із середини висоти правильної трикутної піраміди опущено перпендикуляри на бічне ребро піраміди і на бічну грань. Довжини цих перпендикулярів відповідно дорівнюють $\sqrt{2}$ та 1
- Доведіть, що основа перпендикуляра, проведеного із середини висоти піраміди на бічну грань, лежить на апофемі.
 - Знайдіть об'єм піраміди.

- VI.42 Основою чотирикутної піраміди $PABCD$ є квадрат $ABCD$. Ребро BP перпендикулярне до площини основи піраміди. Точка K – середина ребра PC . Площина BKD утворює з площиною основи піраміди кут α . Знайдіть площу трикутника BKD , якщо довжина ребра BP дорівнює h .

- VI.43 (Т-06, 2) Основою прямого паралелепіпеда є квадрат $ABCD$ зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину A перпендикулярно до прямої BA_1 (у см^2).

- VI.44 (Т-07, 4) У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ (S – вершина) бічне ребро вдвічі більше сторони основи. Знайдіть кут між медіаною трикутника SDC , проведеною з вершини D , та середньою лінією трикутника ASC , що паралельна основі піраміди.

